Coordonatori:

prof. univ. dr. **Mariana CRAIU**
prof. univ. dr. **O. STĂNĂŞILĂ**
prof. univ. dr. **Gh. OPRIŞAN**
prof. univ. dr. **C. UDRIŞTE**

TESTE DE MATEMATICĂ

Enunțuri şi soluții

CUPRINS

1 Algebră **309**
1.1 Mulţimi, funcţii. Funcţia de gradul al doilea 309
1.2 Funcţia exponenţială şi logaritmică 331
1.3 Numere complexe. Combinatorică. Polinoame 337
1.4 Matrice. Determinanţi. Sisteme liniare 350
1.5 Structuri algebrice 368

2 Analiză matematică **381**
2.1 Numere reale. Progresii. Siruri 381
2.2 Limite 385
2.3 Funcţii continue 395
2.4 Derivabilitate 402
2.5 Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatei 409
2.6 Integrale definite 438

3 Geometrie şi trigonometrie **449**
3.1 Vectori. Operaţii cu vectori 449
3.2 Dreapta în plan 458
3.3 Conice 465
3.4 Funcţii şi identităţi trigonometrice 472
3.5 Ecuaţii trigonometrice 492
3.6 Aplicaţii ale trigonometriei în algebră 496
3.7 Aplicaţii ale trigonometrici în geometrie 500
3.8 Drepte şi plane în spaţiu 506
3.9 Ecuaţiile dreptei şi planului 516
3.10 Poliedre. Arii şi volume 520
3.11 Corpuri rotunde. Arii şi volume 530

Capitolul 1

Algebră

1.1 Mulţimi, funcţii. Funcţia de gradul al doilea

1.1A Înlocuim variabila $z = a - (x + y)$ în egalitatea $2xy - z^2 = 9$; $2xy - [a - (x + y)]^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 2ax = -a^2 - 9$ sau $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 - 9$. Avem soluţie unică dacă $a^2 - 9 = 0$, $a = \pm 3$ deci $x = y = -z = a$, $S = 0$.

1.2A Condiţiile $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$ se scriu pentru $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$: $a_0 = 6$, $2a_1 + 4a_2 = -6$, $3a_1 + 9a_2 = -6$ şi rezultă $a_1 = -5$, $a_2 = 1$, $f = 6 - 5X + X^2$.

1.3A Se scrie $(\sqrt{3x + 19})^2 = \left(\sqrt{x + 7} + \sqrt{x + 2}\right)^2$ şi se obţine $(x + 10)^2 = 4(x^2 + 9x + 14)$, $3x^2 + 16x - 44 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{22}{3}$; numai $x_1 = 2$ este soluţie în domeniul $D : x \geq -7$.

1.4A Ecuaţia $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 10$ se poate scrie $x^2 - 4x + 20 = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10$ şi cu notaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = t$, $t > 0$, devine $t^2 - 3t - 10 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 5$, $t_2 = -2$; soluţie este numai $t_1 = 5 = \sqrt{x^2 - 4x + 20}$, deci $x^2 - 4x - 5 = 0$ cu $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

1.5A Pentru ecuaţiile $x^2 + px + 1 = 0$, $x^2 + x + p = 0$, notând rădăcinile cu x_1, x_2 respectiv x_1', x_2', condiţia din enunţ se scrie $x_1^2 + x_2^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2$ deci $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1' + x_2')^2 - 2x_1'x_2'$ sau folosind relaţiile lui Viette: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$, $x_1' + x_2' = -1$, $x_1'x_2' = p$ se obţine $p^2 - 2 = 1 - 2p$, $p^2 + 2p - 3 = 0$ cu soluţiile $p_1 = 1$, $p_2 = -3$.

1.6A Ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x + 4} = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, -3, -1, 0\}$ se poate scrie $\dfrac{2x + 4}{x(x + 4)} + \dfrac{2x + 4}{(x + 1)(x + 3)} = 0$, deci $(2x + 4)[2x^2 + 8x + 3] = 0$

cu rădăcinile $x_1 = -2$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

1.7A Condiţia din enunţ, $x_1 < 2 < x_2$ pentru ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ ne dă $\Delta > 0$, $af(2) < 0$ unde $a = m-1$: $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m-1)(m-4) > 0$, $(m-1)f(2) = (m-1)[4(m-1) - 4(m-2) + m - 4] = (m-1)m < 0$ sau $\Delta = 4m > 0$, $(m-1)m < 0$ deci $m \in (0,1)$.

1.8A Notând $\sqrt[3]{x-1} = t$, ecuaţia $\sqrt[3]{x-1} - x = -1$ se scrie $t^3 - t = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1 \Rightarrow x-1 = 0$, $x-1 = 1$, $x-1 = -1$ deci $x \in \{0,1,2\}$. Altfel: $(\sqrt[3]{x-1})^3 - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x-1}[(\sqrt[3]{x-1})^2 - 1] = 0$.

1.9A Cu condiţia $x \geq 8$, ecuaţia $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-10}$ se scrie $\sqrt{(x-8)(x-2)} = 0$ deci $x = 8$.

1.10A Pentru $2x-1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$ din $x + \sqrt{x^2-2x+1} = 1 \Rightarrow |x-1| = -x+1$, deci $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1.11A Sistemul $\frac{xyz}{y+z} = \frac{np}{n+p}$, $\frac{xyz}{z+x} = \frac{mp}{m+p}$, $\frac{xyz}{x+y} = \frac{mn}{m+n}$ se poate scrie succesiv $\frac{y+z}{xyz} = \frac{n+p}{np}$, $\frac{z+x}{xyz} = \frac{m+p}{mp}$, $\frac{x+y}{xyz} = \frac{m+n}{mn}$, $\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$, $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{p} + \frac{1}{m}$, $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Adunând toate ecuaţiile rezultă $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ de unde $\frac{1}{yz} = \frac{1}{m}$, $\frac{1}{xz} = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{xy} = \frac{1}{p}$ sau $yz = m$, $xz = n$, $xy = p$. Prin înmulţirea tuturor rezultă $(xyz)^2 = mnp > 0$ $xyz = \pm\sqrt{mnp}$ deci $x = \pm\frac{\sqrt{mnp}}{m}$, $y = \pm\frac{\sqrt{mnp}}{n}$, $z = \pm\frac{\sqrt{mnp}}{p}$.

1.12A Prin adunarea tuturor relaţiilor $x+y+z = d$, $y+z+t = a$, $z+t+x = b$, $t+x+y = c$ obţinem $x+y+z+t = \frac{1}{3}(a+b+c+d)$ de unde scăzând pe fiecare rezultă $x = \frac{1}{3}(-2a+b+c+d)$, $y = \frac{1}{3}(a-2b+c+d)$, $z = \frac{1}{3}(a+b-2c+d)$, $t = \frac{1}{3}(a+b+c-2d)$.

1.13A Egalităţile $x+y+z = 14$, $x^2+y^2+z^2 = 98$ ne dau $xy+xz+yz = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 49$

1.14A Dacă $f(x) = 2x-3$ şi $g(x) = 3x-2$, $A = \{x | f(x)g(x) \geq 0\}$, $B = \{x | f(x)/g(x) \geq 0\}$ atunci $B \subset A$ deoarece $x = \frac{2}{3} \in A$, dar $\frac{2}{3} \notin B$.

1.15A $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x > 12\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x(x-2) > 8\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - x - 2 > 0\} \Rightarrow A \subset B \cap C$: $A = (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$, $B = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$, $C = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. $A \subset B \subset C = B \cap C$.

1.16A $|x-1|-3|x+1| = 6 \Rightarrow x \in \emptyset$: $x \leq -1 \Rightarrow -x+1-3(-x-1) = 6$, $x = 1$; $-1 < x \leq 1 \Rightarrow -x+1-3(x+1) = 6$, $x = -2$; $1 < x \Rightarrow x-1-3(x+1) = 6$, $x = -5$, deci $x \in \emptyset$.

1.17A $A = \left\{x \in \mathbf{R} | 2x+3 \geq 0 \text{ şi } \frac{x-2}{x(x-3)} < 0\right\} = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right) \cap [(-\infty, 0) \cup (2,3)] = \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (2,3)$.

1.18A $A = \left\{ \sum_{k=1}^{n^2+4n+3} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} | n \in \mathbf{N} \right\} = -\sum_{k=1}^{m=n^2+4n+3} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = -(\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{m-1} - \sqrt{m} + \sqrt{m} - \sqrt{m+1}) = \sqrt{m+1} - 1 = \sqrt{(n+2)^2 - 1} = n+1$, deci $A = \mathbf{N}^*$.

1.19A Cât este $m = \inf A$, $M = \sup A$ dacă $A = \left\{\frac{9+x^2}{9-x^2} | x \in (-1,2)\right\}$? Schiţând graficul lui $f(x) = \frac{9+x^2}{9-x^2}$ pe $(-3,3)$ ($\lim_{x \to \pm 3} f(x) = +\infty$, f descreşte pe $(-3,0]$ creşte pe $[0,3)$). $f(-1) = \frac{5}{4}$, $f(0) = 1$, $f(2) = \frac{13}{5}$ deci $m = 1$, $M = \frac{13}{5}$.

1.20A Funcţia $f : (-2,0) \cup (2,\infty) \to [-4,\infty)$, $f(x) = x^2 - 4$ nu este bijectivă (este injectivă) deoarece f nu este surjectivă, -4 şi 0 nu aparţin imaginii lui f.

1.21A Pentru funcţia $f(x) = 2\sqrt{x(5-x)}$, $M = \max_{x \in [0,5]} f(x)$, $m = \min_{x \in [0,5]} f(x)$, sunt $M = 5$, $m = 0$ (M şi m se obţin pentru $x = \frac{5}{2}$ şi $x = 0$, $x = 5$ ca şi pentru $g(x) = x(5-x) = y$ parabolă cu vârful $x = \frac{5}{2}$)(vezi **2.781A**).

1.22A $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} < 2 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$, domeniul $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$; pentru $x < 0 \Rightarrow 2x^2 - x > 0$ deci $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ iar pentru $0 < x$, $2x^2 - x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$.

1.23A Graficele funcţiilor $f(x) = mx^2 - 2(m+2)x - 1$ şi $g(x) = x^2 - 2x + m$ au două puncte comune distincte dacă ecuaţia $f(x) = g(x)$ are discriminantul $\Delta > 0$: $(m-1)x^2 - 2(m+1)x - (m-1) = 0$, $\Delta = 2m(m+1) > 0$, $m \in (-\infty, -1) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$ ($m = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$).

1.24A $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{mx^2 - (m-1)x + m - 1}$ este corect definită dacă $mx^2 - (m-1)x + m - 1 \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ deci $\Delta = -3m^2 + 2m + 1 \leq 0$, $m > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)$, $m > 0$ deci $m \in [1, \infty)$.

1.25A $(x^2 - 5x)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$ dacă $x \in [0,2] \cup [4,5]$ deoarece acolo trinoamele $x^2 - 5x$ şi $x^2 - 6x + 8$ au semne contrare: $[0,5] \cap \{(-\infty, 2] \cup [4, \infty)\}$.

1.26A Ecuaţia $x^2 - 3|x| - 4 = 0$ are soluţiile $x = \pm 4$: $x < 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ deci $x = -4$, $x > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ deci $x = 4$.

1.27A Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $f : [4,\infty) \to [a,\infty)$, $f(x) = x - 5 - 2\sqrt{x-4}$ să fie surjectivă este $a = 2$; $f(x) = (\sqrt{x-4} - 1)^2 - 2 \geq -2$.

1.28A În sistemul $|x-2|+|y+3|=4$, $x=2+|y+3|$ observăm că $x-2=|y+3|=|x-2|$ (deoarece $x-2\geq 0$) deci $|x-2|=2$, $|y+3|=2$ $x-2=\pm 2$, $y+3=\pm 2$, $x=2\pm 2$, $y=-3\pm 2$ de unde $x_1=0$, $x_2=4$, $y_1=-1$, $y_2=-5$. Dar $x=0$ nu este soluţie şi avem $x=4$, $y=-1$ sau $x=4$ şi $y=-5$.

1.29A Ecuaţia $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ se scrie $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=120$, $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$. Notăm $x^2+5x+4=t$: $t(t+2)=120$, $t_1=-12$, $t_2=10$ de unde rezultă $x=1$, $x=-6$.

1.30A Inecuaţia $\sqrt{6-x}>x$ $(x<6)$ este evidentă pentru $x\leq 0$; dacă $x>0$ obţinem $6-x>x^2$, $x\in(0,2)$ deci soluţia este $A=\{x, x<2\}$.

1.31A În fiecare din ecuaţiile $x^3+3=0$, $x^4+4=0$, $x^5+5=0$ coeficienţii termenilor x^2 respectiv x^3 sau x^4 sunt zero deci suma tuturor rădăcinilor fiecăreia este zero. Rădăcinile reale sunt $x_1=-\sqrt[3]{3}$ (pentru $x^3+3=0$) şi $x_2=-\sqrt[5]{5}$ (pentru $x^5+5=0$), deci suma celor complexe este $\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$.

1.32A Expresia E se scrie

$$E=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\sqrt{xy}}\left[\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+2\right]=\frac{1}{xy}$$

1.33A $E=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\sqrt{\frac{abc+4}{a}-4\sqrt{\frac{bc}{a}}}$ $(a,b,c>0)$, $\sqrt{abc}>2$) este

$$E=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\sqrt{\frac{abc-4\sqrt{abc}+4}{a}}=\frac{1}{\sqrt{abc}-2}\cdot\frac{\sqrt{(\sqrt{abc}-2)^2}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

1.34A În inecuaţia $5x^2-20x+26>\dfrac{4}{x^2-4x+5}$, notăm $x^2-4x+5=t>0$ şi obţinem $5t+1>\frac{4}{t}$, $5t^2+t-4>0$, $t<-1$, $\frac{4}{5}<t$ şi deci rămâne $\frac{4}{5}<t=x^2-4x+5$, $5x^2-20x+21>0$. Deoarece $\Delta<0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ verifică.

1.35A Să se determine m astfel ca $x^2+y^2-8x-8y+m>0$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$: $(x-4)^2+(y-4)^2+m-32>0$ deci $m-32>0$, $m>32$.

1.36A Valorile parametrului m pentru care vârfurile parabolelor $y=x^2+2(m-1)x+m-1$ sunt deasupra axei Ox, adică $y_V>0$ $y_V=f(x_V)$, $x_V=-\dfrac{b}{2a}=-(m-1)$, $V(x_V,y_V)$ sunt vârfurile parabolelor. Deci $y_V=-m^2+3m-2>0$, $m^2-3m+2<0$, $m_{1,2}=1,2$, $m\in(1,2)$.

1.37A Valoarea expresiei $E=x^2+y^2+z^2$, unde (x,y,z) este soluţia sistemului $\begin{cases}x+y+z=2\\ xy+xz+yz=0\end{cases}$: $E=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=4$.

1.38A Soluţiile pozitive ale sistemului $x\sqrt[3]{yzt}=1$, $y\sqrt[3]{xzt}=4$, $z\sqrt[3]{xyt}=9$, $t\sqrt[3]{xyz}=16$. Înmulţim toate ecuaţiile $xyzt\sqrt[3]{(xyzt)^3}=1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\Rightarrow xyzt=4!$ şi $x^2(xyzt)=1^6$, $y^2(xyzt)=2^6$, $z^2(xyzt)=3^6$, $t^2(xyzt)=4^6$ deci $x=\dfrac{1^3}{\sqrt{4!}}$, $y=\dfrac{2^3}{\sqrt{4!}}$, $z=\dfrac{3^3}{\sqrt{4!}}$, $t=\dfrac{4^3}{\sqrt{4!}}$.

1.39A Soluţiile sistemului: $u+v=2$, $ux+vy=1$, $ux^2+vy^2=-1$, $ux^3+vy^3=-5$: primele două ecuaţii ne dau $u=\dfrac{1-2y}{x-y}$, $v=-\dfrac{1-2x}{x-y}$ şi înlocuim în ultime două: $x^2\dfrac{1-2y}{x-y}-y^2\dfrac{1-2x}{x-y}=-1$, $x^3\dfrac{1-2y}{x-y}-y^3\dfrac{1-2x}{x-y}=-5\Rightarrow\dfrac{1}{x-y}[x^2-y^2-2xy(x-y)]=-1$, $\dfrac{1}{x-y}[x^3-y^3-2xy(x^2-y^2)]=5$ sau $x+y-2xy=-1$, $(x+y)^2-3xy-2xy(x+y)=-5$. Sistemul $s-2p=-1$, $s^2-3p-2ps=-5$ are soluţia $s=3$, $p=2$ deci $x=1$, $y=2$ sau $x=2$, $y=1$ de unde $u=3$, $v=-1$ sau $u=-1$, $v=3$ deci soluţiile sunt (x,y,u,v) : $(1,2,3,-1)$ şi $(2,1,-1,3)$.

1.40A Ordinea crescătoare a numerelor $x=\sqrt{3}-1$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $z=1+\sqrt{2}$: evident $z>x$, $z>y$ iar $x>y\Rightarrow\sqrt{3}-1>\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}>1+\sqrt{5}$, $5+2\sqrt{6}>6+2\sqrt{5}$, $2(\sqrt{6}-\sqrt{5})>1$, $4(11-2\sqrt{30})>1$, $43>8\sqrt{30}$, $43^2>64.30$ fals, deci $x<y$.

1.41A Ordinea crescătoare a numerelor $A=\sqrt{6}$, $B=\sqrt[4]{12}$, $C=\sqrt[3]{8}$, $D=\sqrt[6]{20}$: le aducem la acelaşi indice, $A=\sqrt[12]{6^6}=\sqrt[12]{2^6\cdot 3^6}$, $B=\sqrt[12]{12^3}=\sqrt[12]{2^6\cdot 3^3}$, $C=\sqrt[12]{8^4}=\sqrt[12]{2^{12}}$, $D=\sqrt[12]{20^2}=\sqrt[12]{2^4\cdot 5^2}$ deci ordinea este $D<B<C<A$.

1.42A Numerele $x=\dfrac{17}{6}$ şi $y=2,8(3)$ sunt egale deoarece împărţind pe 17 la 6 obţinem $2,83333\ldots=2,8(3)$.

1.43A Fiind date mulţimile $A=\{x\in\mathbf{R}|2x-1<3x+2\}=\{x\in\mathbf{R}|-3<x\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|3x+2\leq x+5\}=\left\{x\in\mathbf{R}, x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$ avem $A\cap B=\left(-3,\dfrac{3}{2}\right]$.

1.44A Valorile parametrului $a\in\mathbf{R}$ pentru care mulţimea $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax=0\}$ este formată dintr-un singur element este $a=0$ deoarece soluţiile ecuaţiei $x^2+ax=0$ sunt $x_1=0$, $x_2=-a$ deci $x_1=x_2=0=-a\Rightarrow a=0$.

1.45A Graficul funcţiei $f(x)=x^2-(a+3)x+a^2$ taie axa Ox în două puncte distincte dacă rădăcinile ecuaţiei asociate $x^2-(a+3)x+a^2=0$ sunt reale şi distincte, deci discriminantul $\Delta>0$, $\Delta=(a+3)^2-4a^2=-3a^2+6a+9>0$, $3a^2-6a-9<0$, $a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+27}}{3}$ deci $a\in(-1,3)$.

1.46A Inecuaţia $\dfrac{x^2-16}{x}\leq 0$, $x\neq 0$ are soluţia $A=(-\infty,-4]\cup(0,4]$.

1.47A Sistemul $\begin{cases} \frac{x-1}{3}+\frac{y-x}{2}=-\frac{1}{6} \\ \frac{2x-5}{4}-\frac{1-y}{2}=y-\frac{5}{4} \end{cases}$ echivalent cu $\begin{cases} -x+3y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ are soluţia $x=2$, $y=1$.

1.48A Dacă $a,b\in(0,\infty)$, $a\neq b$ şi $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{2ab}{a+b}$, $z=\sqrt{ab}$ atunci $y\leq z\leq x$ (mediile armonică, geometrică, aritmetică): $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, $0\leq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\Leftrightarrow 2ab\leq\sqrt{ab}(a+b)$, $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.

1.49A Inecuaţia $\frac{x-1}{1-2x}\leq 1$, $x\neq\frac{1}{2}$ are soluţia $A=\left\{x,x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)\right\}$: $\frac{3x-2}{2x-1}\geq 0\Leftrightarrow(3x-2)(2x-1)\geq 0$, $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$.

1.50A Inecuaţia $x<|x|$ este verificată pentru $x<0$, unde $|x|=-x$, $x<-x$, $2x<0$ iar pentru $x>0$, unde $x<x$ nu este verificată.

1.51A Valoarea lui $m\in\mathbf{R}_+$ astfel încât pentru ecuaţia $x^2+mx+2m+8=0$ avem $x_2=2x_1$ este $m=12$: $x_1+x_2=-m$, $x_1\cdot x_2=2m+8$, $x_2=2x_1$, $x_1^2=m+4$, $x_1=-\frac{m}{3}$ deci $m^2-9m-36=0$, $m_{1,2}=\frac{9\pm 15}{2}$.

1.52A Pentru ecuaţia $x^2-(3m+1)x+\frac{1}{4}=0$ mulţimile $A=\{m\in\mathbf{R}|$ ecuaţia are două soluţii reale distincte $\}$ şi $B=\{x\in\mathbf{R}|$ ecuaţia are soluţii de semne contrare$\}$ sunt: $A=\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,\infty)$, $B=\emptyset$ deoarece $\Delta=9m^2+6m>0$, $m_{1,2}=-\frac{2}{3}$ şi 0 implică $m\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,\infty)$ iar $x_1x_2=\frac{1}{4}<0$, $m\in\emptyset$.

1.53A Funcţia de gradul doi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $y=f(x)=-x^2+x+3$, nu este nici injectivă, nici surjectivă, nici crescătoare, nici descrescătoare (orice funcţie de gradul doi are aceste proprietăţi) dar este descrescătoare pentru $x\geq\frac{1}{2}$ deoarece $x_V=\frac{1}{2}$ şi are un maxim în $x=\frac{1}{2}$.

1.54A Funcţia $f:(0,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ pe semidreapta $(0,\infty)$ este injectivă (vârful parabolei este $x_V=-\frac{1}{2}$, $y_V=\frac{3}{4}$) nu este surjectivă, nici liniară, nici mărginită, nici periodică.

1.55A Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=mx^2+(2m+1)x+2-m$ şi $A=\{m\in\mathbf{R}|f$ are un minim în $x=2\}$, $B=\{m\in\mathbf{R}|$ valoarea maximă a funcţiei f este $1\}$. Atunci $A=\{m,m>0,m=-\frac{1}{6}\}=\emptyset$, $B=\{m\in\mathbf{R},8m^2+1=0\}=\emptyset$ ($x_V=-\frac{2m+1}{2m}=2\Rightarrow m=-\frac{1}{6}$, $y_V=f(x_V)=\frac{-8m^2+4m-1}{4m}=1\Rightarrow$ $8m^2+1=0$).

1.56A Mulţimea valorilor $m\in\mathbf{R}$ pentru care graficele funcţiilor $f(x)=x^2-2x-4$ şi $g(x)=-x^2+2m^2x+6m$ au acelaşi vârf este $\{-1\}$. Condiţia se scrie $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1=-\frac{2m^2}{+(-2)}=m^2$, $m=\pm 1$, $y_V=f(x_V)=f(1)=-5$;

verificăm pentru $m=1$ şi pentru $m=-1$ dacă $g(1)=-5$ şi găsim $m=-1$.

1.57A Pentru $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$, $A=\{x\in\mathbf{R}|f(x)=0\}=\{-1\}$.

1.58A Soluţia inecuaţiei $|x+1|>2$ este $A=\{x,x\in(-\infty,3)\cup(1,\infty)\}$ deoarece $x+1<-2$, $2<x+1$ deci $x<-3$, $1<x$.

1.59A Suma cuburilor soluţiilor ecuaţiei $x^2-4x+1=0$ este 52: $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=1\Rightarrow x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=4^3-3\cdot 4=64-12=52$.

1.60A Soluţia inecuaţiei $x^2+x-2\leq 0$ este $[-2,1]$ deoarece trinomul x^2+x-2 cu rădăcinile $-2,1$ are semn contrar cu $+1$ ($a=+1$) între rădăcini, deci $-2\leq x\leq 1$.

1.61A Soluţia sistemului $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ echivalent cu $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ este $(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$.

1.62A Inecuaţia $2-x>x+6\Leftrightarrow -4>2x$ are soluţia $x<-2$.

1.63A Dacă $a,b\in\mathbf{R}_+$ verifică egalitatea $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ atunci $a=0$ sau $b=0$: $a+b+\sqrt{ab}=a+b\Rightarrow ab=0$, deci $a=0$ sau $b=0$.

1.64A Fie $A=\{x\in\mathbf{R}|4x+5\geq 2x-11\}$ şi $B=\{x\in\mathbf{R}|10-3x<5x-14\}$ atunci $A\cup B=\{x\in\mathbf{R}|x\geq -8\}$, $A=\{x,x\geq -8\}$, $B=\{x,3<x\}$.

1.65A Dacă ecuaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$, $x,a,b\neq 0$ are un număr finit de soluţii atunci S suma lor este $S=-(a+b)$: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{x(x+a+b)}\Rightarrow(a+b)[x^2+(a+b)x+ab]=0$; dacă $a+b=0$ avem o identitate deci o infinitate de soluţii, $a+b\neq 0\Rightarrow S=-(a+b)$.

1.66A Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\sqrt{x-3+\frac{1}{x}:\frac{x^2-3x+1}{x}}>0\Rightarrow x>0$ şi $x\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$ deci $\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$.

1.67A Dacă $A=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt[4]{x+78}+\sqrt[4]{19-x}=5\}$ şi $S=$ suma elementelor lui A, atunci $S=-59$: notăm $\sqrt[4]{78+x}=u$, $\sqrt[4]{19-x}=v$, $u+v=5$, $u^4+v^4=97$, $(u+v)^4=625=u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4=u^4+v^4+4uv(u^2+v^2)+6(uv)^2=97+4uv[25-2uv]+6(uv)^2$, $(uv)^2-50uv+264=0$, $(uv)_{1,2}=25\pm 19$ deci avem sistemele $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$, $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \end{cases}$ şi numai primul are soluţii reale $u=2$, $v=3$ sau $u=3$, $v=2$ de unde rezultă $x=-62$ şi $x=3$ deci $S=-62+3=-59$.

1.68A Dacă x,y reale verifică sistemul $x^2-y^2=35$, $xy=6$ atunci $S=x+y$ este $S=\pm 7$: $y=\frac{6}{x}$, $x^2-\frac{36}{x^2}=35$, $x^4-35x^2-36=0$, $(x^2)_{1,2}=-1;36$, $x_{1,2}=\pm 6$, $y_{1,2}=\pm 1$, deci $S=6+1=7$, $S=-6-1=-7$.

1.69A Să se determine mulţimea $A=\{x\in\mathbf{Z}|\frac{x+4}{x+1}\in\mathbf{Z}\}$: $\frac{x+4}{x+1}=\frac{x+1+3}{x+1}=$

$1+\frac{3}{x+1}$ deci $x+1=\pm1$, $x+1=\pm3$, $x=-1\pm1$, $x=-1\pm3$ şi rezultă $A=\{-4,-2,0,2\}$. Se poate verifica şi direct grila.

1.70A Să se determine mulţimea $A=\{x\in\mathbf{N}|x=\frac{4n}{n+2},n\in\mathbf{N}\}$; $x=\frac{4n}{n+2}=\frac{4n+8-8}{n+2}=4-\frac{8}{n+2}$ şi alegem din $n+2=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$, $A=\{0,2,6\}$.

1.71A Găsiţi patru numere naturale consecutive x,y,z,w în această ordine care verifică $x^3+y^3+z^3=w^3$. Singurele care verifică sunt 3,4,5,6.

1.72A Ordinea crescătoare a numerelor $x=\sqrt{6}$, $y=\sqrt[4]{12}$, $z=\sqrt[8]{72}$ este $z<y<x$. Aducem la acelaşi indice $x=\sqrt[8]{6^4}$, $y=\sqrt[8]{12^2}$, $z=\sqrt[8]{72}$ şi $72<144<36^2$.

1.73A Funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+2$, $g(x)=3|x|+2$ sunt f bijectivă, g nu este bijectivă: f este crescătoare, $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$, $\mathrm{Im}g=\{y,y\geq2\}$, g nu este injectivă, $g(-x)=g(x)$.

1.74A Ecuaţia $x^2+x+m=0$ are rădăcini reale şi distincte dacă $\Delta=1-4m>0$ deci $m<\frac{1}{4}$.

1.75A Pentru ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ cu soluţiile x_1,x_2 şi $s=x_1+x_2$, $p=x_1x_2$ expresia $d=|x_1-x_2|$ în funcţie de s şi p este $d=\sqrt{s^2-4p}$: $d=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{s^2-4p}$.

1.76A Imaginea funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3x+\frac{1}{4}$ este $\mathrm{Im}f=[-2,\infty)$: $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\geq-2$.

1.77A Soluţiile sistemului $x(x+y+z+t)=10$, $y(x+y+z+t)=20$, $z(x+y+z+t)=30$, $t(x+y+z+t)=40$ sunt $x=\pm1$, $y=\pm2$, $z=\pm3$, $t=\pm4$: adunăm toate ecuaţiile $(x+y+z+t)^2=100$, $x+y+z+t=\pm10$ şi înlocuind în fiecare ecuaţie rezultă $x=\pm1$, $y=\pm2$, $z=\pm3$, $t=\pm4$.

1.78A Valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $\frac{x(x+1)}{x+2}=m$ are soluţii reale de semne contrare sunt $m>0$: condiţiile sunt pentru ecuaţia $x^2+x(1-m)-2m=0$, $\Delta=m^2+6m+1>0$, $P=x_1x_2=-2m<0$, $m\in[(-\infty,-3-2\sqrt{2})\cup(-3+2\sqrt{2},\infty)]\cap(0,\infty)=(0,\infty)$.

1.79A Dacă $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât $\alpha=a+b$, $\beta=a-b$ să fie raţionale atunci $a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $b=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ sunt raţionale, $a\in Q$, $b\in Q$.

1.80A Soluţia ecuaţiei $|6-x|=2x+3$ este $x=1$: $6-x=\pm(2x+3)$, $x=1$, $x=-9$ dar $x=-9$ nu verifică ecuaţia.

1.81A Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care rădăcinile x_1,x_2 ale ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0$ satisface relaţia $|x_1-x_2|=1$ sunt $\{0,2\}$: $x_1+x_2=m+1$, $x_1x_2=m$, $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(m+1)^2-4m}=|m-1|=1$ deci $m=0$ sau $m=2$, $m\in\{0,2\}$.

1.82A Soluţiile inecuaţiei $|x^2-x-2|\leq1$ echivalentă cu inecuaţiile $-1\leq x^2-x-2\leq+1$ adică $0\leq x^2-x-1$, $x^2-x-3\leq0$ sunt date de

$x\in\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

1.83A Mulţimea S a soluţiilor sistemului $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\x^2-xy+y^2=7\end{cases}$: $x^2+y^2=5$, $xy=-2$ sau $x+y=\pm1$, $xy=-2$ ne dau soluţiile $S=\{(1,-2),(-2,1),(-1,2),(2,-1)\}$.

1.84A Soluţiile sistemului $\begin{cases}x+2y=5\\x^2+2y^2-xy=7\end{cases}$ sunt $(1,2)$ şi $(\frac{11}{4},\frac{9}{8})$: $x=5-2y$, $(5-2y)^2+2y^2-y(5-2y)=7$, $8y^2-25y+18=0$, $y_{1,2}=\begin{cases}2\\\frac{9}{8}\end{cases}$, $x_{1,2}=\begin{cases}1\\\frac{11}{4}\end{cases}$.

1.85A Imaginea funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ este $\mathrm{Im}f=[-1,1]$. $\frac{2x}{1+x^2}\leq1\Rightarrow0\leq(x-1)^2$ iar $-1\leq\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow-(x-1)\leq0$ sau $\sin2t=\frac{2\mathrm{tg}t}{1+\mathrm{tg}^2t}$. Altfel: $\frac{2x}{1+x^2}=y$, $yx^2-2x+y=0$, $\Delta y=1-y^2\geq0$, $|y|\leq1$.

1.86B Pentru $a>0$ mulţimea $B=\left\{x\in\mathbf{R}|\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right\}=(0,a]$: avem egalitatea $\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{|x|}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}$, deoarece pentru $x>0$, $x=|x|=\sqrt{x^2}$.

1.87B Fie $M=\{(a,b)\in Q^2|\sqrt{a-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}\}$ şi $k\in N$ numărul elementelor mulţimii M. Avem $M=\emptyset$: $a-\sqrt{3}=a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}\Rightarrow a=a^2+3b^3$, $2ab=-1$, $12b^4+1=-2b$; dar evident $-2b<12b^4+1$ $(\forall)b\in\mathbf{R}$ sau altfel $b=-\frac{1}{2a}$, $a=a^2+3\left(-\frac{1}{2a}\right)^2$, $4a^4-4a^3+3=0$; ultima ecuaţie nu are nici o rădăcină reală deoarece $f(a)=4a^4-4a^3+3$, cu derivata $f'(a)=16a^3-12a^2$ are $a=0$ rădăcină dublă (punct de inflexiune) şi un minim în $a=\frac{3}{4}$, unde $f\left(\frac{3}{4}\right)=4\left(\frac{3}{4}\right)^4-4\left(\frac{3}{4}\right)^3+3=-\left(\frac{3}{4}\right)^3+3>0$.

1.88B Mulţimea $M=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=\sqrt{4-2x}\}=\{1\}$. Domeniul de definiţie al egalităţii este [0,2] deoarece pe [0,2] $1-\sqrt{2x-x^2}=\frac{(1-x)^2}{1+\sqrt{2x-x^2}}>0$. Ridicăm la pătrat, obţinem $2+|1-x|=2(2-x)$: dacă $x\in[0,1]$, $|1-x|=1-x$, $2+1-x=4-2x\Rightarrow x=1$ iar pentru $x\in[1,2]$, $|1-x|=x-1$, $2+x-1=4-2x$, $x=1$, deci $M\setminus[0,1]=\emptyset$.

1.89B Funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax^5+(a^2+1)x^3+a+2$ este surjectivă pentru $\forall a\in\mathbf{R}$ deoarece pentru $a>0$, $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$ polinoamele sunt continue deci $\mathrm{Im}f=\mathbf{R}$; analog pentru $a<0$.

1.90B Dacă x_1,x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-2x+5=0$ atunci expresia

$E = \frac{x_1^3-x_1^2+2x_1+4}{x_1^3-x_1^2+3x_1+3} + \frac{x_2^3-x_2^2+2x_2+4}{x_2^3-x_2^2+3x_2+3}$ este egală cu 2. Avem evident egalităţile $x_1^2-2x_1+5=0$, $x_2^2-2x_2+5=0$, $x_1^3-2x_1^2+5x_1=0$, $x_2^3-2x_2^2+5x_2=0$ şi ordonând convenabil termenii putem scrie $x_1^3-x_1^2+2x_1+4=(x_1^3-2x_1^2+5x_1)+(x_1^2-2x_1+5)-x_1-1=-x_1-1$, analog $x_2^3-x_2^2+2x_2+4=-x_2-1$, $x_1^3-x_1^2+3x_1+3=(x_1^3-2x_1^2+5x_1)+(x_1^2-2x_1+5)-2=-2$, $x_2^3-x_2^2+3x_2+3=-2$ deci $E=\frac{-x_1-1}{-2}+\frac{-x_2-1}{-2}=\frac{x_1+x_2}{2}+1=2$.

1.91B Dacă x_1,x_2,x_3,x_4 sunt soluţiile ecuaţiei $2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0$ atunci $S=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{17}}{2}\in(4,5)$. Ecuaţia este reciprocă, împărţim prin x^2, $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$, facem substituţia $x-\frac{1}{x}=t$, obţinem $2(t^2+2)+3t-3=0$, $2t^2+3t+1=0$, $t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4}\Rightarrow -1,-\frac{1}{2}$, $x-\frac{1}{x}=-1$, $x-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$ dau rădăcinile $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_4=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ deci $S=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{17}}{2}\in(4,5)$.

1.92B Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ are proprietatea $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$ atunci $\alpha=f(3)=9$: avem $f(0)=f(0)+f(0)$ deci $f(0)=0$ iar pentru $x=y=3$ rezultă $f(0)=0=f(3)+f(3)-18$, $f(3)=9$.

1.93B Mulţimile $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2ax+b=0,a,b\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2bx+a=0,a,b\in\mathbf{Z}\}$, $K=$ numărul elementelor mulţimii şi $M=\{(a,b)\in\mathbf{Z}^2|A\cap B$ are exact un element $\}$. Atunci $M=\emptyset$. $(x_0^2+2ax_0+b)-(x_0^2+2bx_0+a)=0\Rightarrow(a-b)(2x_0-1)=0$; dacă $a=b$, $A\cap B$ are două elemente deci $a\neq b$ şi $x_0=\frac{1}{2}$, $a+b=-\frac{1}{4}$ dar $a,b\in\mathbf{Z}\Rightarrow a+b\in\mathbf{Z}$ şi relaţia $a+b=-\frac{1}{4}$ este imposibilă, deci $M=\emptyset$.

1.94B Mulţimea M a valorilor lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care $-7<\frac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1}<3$ $(\forall)x\in\mathbf{R}$: rezultă inegalităţile $0<8x^2+(m-6)x+2$, $0<2x^2-(m+4)x+8$, $\forall x\in\mathbf{R}$ deci $\Delta_1=(m-6)^2-64<0$, $\Delta_2=(m+4)^2-64<0\Rightarrow -8<m-6<8$, $-8<m+4<8\Rightarrow -2<m<14$, $-12<m<4$ deci $(-2,4)=M$.

1.95B Ecuaţia $\sqrt[5]{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}+\sqrt[5]{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}=2$ are o soluţie, $x=0$. Observăm că $\sqrt[5]{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}}=t$ deci $t+\frac{1}{t}=2$ de unde $t=1$, $2x+1-2\sqrt{x^2+x}=1$, $x=\sqrt{x^2+x}$ deci $x=0$.

1.96B Dacă $A=\{a\in\mathbf{R}|\sqrt{x^2+1}\le ax,\ (\forall)x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\}$, atunci $A=[\sqrt{5},\infty)$: avem succesiv $\frac{1}{2}\le x\le 1$, $\frac{1}{4}\le x^2\le 1$, $1\le\frac{1}{x^2}\le 4$, $2\le\frac{1}{x^2}+1\le 5$ deci $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\le\sqrt{5}\le a$, $a>0$, deci $A=[\sqrt{5},\infty)$.

1.97B Fie ecuaţia $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=a$ şi A mulţimea acelor $a\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia are două soluţii reale distincte. Atunci $A=(1,5]$. Ecuaţia se scrie $\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-3)^2}=a$, $|\sqrt{x-4}-2|+|\sqrt{x-4}-3|=a$, $x>4$. Luând separat cazurile $\sqrt{x-4}\le 2$, $2\le\sqrt{x-4}\le 3$, $3\le\sqrt{x-4}$ rezultă $A=(1,5]$.

1.98B Ecuaţia $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}}=x-1$ are o singură rădăcină $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$: condiţii de existenţă $x\ge 1$, $x^4-x-1<0$, $2x-x^2\le 0$ deci $x\le 2$. După două ridicări la pătrat, $1-\sqrt{x^4-x}=x^2-2x+1$, $(2x-x^2)^2=(\sqrt{x^4-x})^2$, $4x^3-4x^2-x=0$ cu singura soluţie convenabilă $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (care înlocuită în ecuaţia iniţială o verifică).

1.99B $f:Q\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x^2+ax+2$ este injectivă pentru $a\in\mathbf{R}\setminus Q$ (deci a iraţional): $f(x_1)=2x_1^2+ax_1+2=2x_2^2+ax_2+2=f(x_2)\Rightarrow 2(x_1^2-x_2^2)+a(x_1-x_2)=0$, $(x_1-x_2)[2(x_1+x_2)+a]=0$: f este injectivă dacă $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ sau $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Dacă $a\in\mathbf{R}\setminus Q$ atunci egalitatea $x_1+x_2=-\frac{a}{2}$ este imposibilă (deoarece $x_1+x_2\in Q$) deci f este injectivă dacă a este iraţional.

1.100B Dacă S este suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt{9+x}=8$, atunci $S=16$. Condiţii: $x\in[-9,97]$. Notăm $\sqrt[4]{97-x}=u\ge 0$, $\sqrt{9+x}=v\ge 0$ şi rezultă $u+v=8$, $u^4+v^2=106$, $u^4+u^2-16u-42=0$ (avem $(u-3)(u^3+3u^2+10u+14)=0$) cu singura soluţie pozitivă $u=3$ deci $x=16$. Altfel se observă direct că $x=16$ este soluţie ($\sqrt[4]{97-16}=3$, $\sqrt{9+16}=5$) şi rezultă că este unică intersectând $y=\sqrt[4]{97-x}$, $y=8-\sqrt{9+x}$.

1.101B Funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ este o bijecţie deoarece $\mathrm{Im}f=\mathbf{R}$ ($f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$) f este strict crescătoare (reuniunea a două semidrepte de pante 2 şi 1, $f(-0)=f(+0)=1$) deci injectivă (se verifică şi direct că $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, o relaţie de forma $x_1+1=2x_2+1$ cu $x_1>0$, $x_2\le 0$ este imposibilă deoarece $x_1=2x_2$).

1.102B Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2$, $g(x)=x+1$. f nu este nici injectivă nici surjectivă ($y=f(x)$ reprezintă o parabolă) deci nu este inversabilă, $(g\circ f)(x)=x^2-1\neq(x+1)^2-2$, $(f\circ g)(x)=g^2(x)-2=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$ nu este bijecţie. Evident $\mathrm{Im}f=\{y,y=x^2-2,y\ge -2\}=[-2,\infty)$.

1.103B Dacă mulţimea A are n elemente şi $a\in A$, atunci numărul m al submulţimilor lui A care nu conţine pe a este $m=2^{n-1}$: submulţimile sunt, mulţimea vidă C_{n-1}^0 mulţimile formate dintr-un element C_{n-1}^1 din două elemente C_{n-1}^2 din 3 elemente $C_n^3\ldots$ din $n-2$ şi din $n-1$ elemente, C_{n-1}^{n-2}, C_{n-1}^{n-1} deci $m=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+\ldots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$.

1.104B Dacă $A=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{2x-1}<\sqrt{3x+2}\}$ şi $B=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{3x+2}\le\sqrt{x+5}\}$ atunci $A\cup B=\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$: $A=\left[\frac{1}{2},\infty\right)\cap(-3,\infty)=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$, $B=\left[-\frac{2}{3},\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]=\left[-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$ deci $A\cup B=\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$.

1.105B Mulţimea valorilor $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 > m - 4$ unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - mx + 2 = 0$ este $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; $x_1 + x_2 = m$, $x_1 \cdot x_2 = 2$, $x_1^2 + x_2^2 = (x + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4 > m - 4 \Rightarrow m^2 - m > 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

1.106B Idem ca în 1.105B pentru ecuaţia $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ cu condiţia $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$. R. $x_1 + x_2 = -(m+2)$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)$, $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| = |-(m+2) + \frac{3}{2}(m^2 + 4m + 3)| = \frac{1}{2}|3m^2 + 10m + 5| < 1 \Rightarrow -2 < 3m^2 + 10m + 5 < 2 \Leftrightarrow 0 < 3m^2 + 10m + 7$, $3m^2 + 10m + 3 < 0$ avem $\left[\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (-1, \infty)\right] \cap \left(-3, -\frac{1}{3}\right) = \left(-3, -\frac{7}{3}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \ni m$.

1.107B Mulţimea valorilor $m \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuaţia $x^2 + mx - 2 = 0$ să aibă ambele rădăcini în intervalul $(-1, 2)$ este $m \in \emptyset$. Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{x-2}{x+1}$ şi pentru $x \in (-1, 2)$ y ia valori negative, deci rădăcinile ecuaţiei în y transformate, $y_1 = \frac{x_1-2}{x_1+1}$, $y_2 = \frac{x_2-2}{x_2+1}$ sunt ambele negative, $y_1, y_2 < 0$ deci condiţiile sunt $\Delta \geq 0$, $S = y_1 + y_2 < 0$, $P = y_1y_2 > 0$ pentru ecuaţia în y : $x = -\frac{y+2}{y-1}$, $\left(\frac{y+2}{y-1}\right)^2 - m\frac{y-2}{y-1} - 2 = 0$, $(m+1)y^2 + (m-8)y - 2(m+1) = 0$, $\Delta = (m-8)^2 + 8(m+1)^2 \geq 0$, $S = -\frac{m-8}{m+1} < 0$, $P = -2 > 0$ (fals) deci $m \in \emptyset$.

1.108B Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât pentru $f(x) = (a+1)x^2 - ax + a - 2$ să avem $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Condiţiile sunt $\Delta < 0$ (semn constant) şi $a + 1 < 0$, $3a^2 - 4a - 8 > 0$ şi $a < -1$, deci $a < \frac{2-\sqrt{28}}{3}$.

1.109B Expresia $E(x, m) = m3^{2x} - 2(m-1)3^x + m - 3$, $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}^*$ este negativă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ pe mulţimea $M = \{m \in \mathbf{R}^*, E(m, x) < 0\} = (-\infty, -1)$. Condiţiile sunt $\Delta < 0$, $m < 0$: $\Delta = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1 < 0$ deci $m < -1$. Lui $m = -1$ îi corespunde $3^x = t = 2$ ($x = \log_3 2$); mulţimea $(-\infty, -1)$ obţinută pentru trinomul $mt^2 - 2(m-1)t + m - 3$ unde $t \in \mathbf{R}$ rămâne aceeaşi şi pentru $t > 0$, $t = 3^x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, $m(t-1)^2 + 2t - 3 < 0$.

1.110B Mulţimea valorilor (imaginea) $\mathrm{Im}f$ pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^2 + 2x - 2$ este $\mathrm{Im}f = [-3, +\infty)$ deoarece $y = f(x) = (x+1)^2 - 3 \geq -3$.

1.111B Funcţiile $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_\lambda(x) = \lambda x^2 + x + 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ au graficele ce trec prin aceleaşi puncte $(1,2)$, $(-1,0)$: $\lambda(x^2 - 1) + x + 1 - y \equiv 0$ în λ deci verificată pentru orice λ (polinom identic nul în λ) $\Rightarrow x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$, $x + 1 - y = 0$ deci punctele $(1,2)$ şi $(-1,0)$.

1.112B Pentru ce valori $\alpha \in \mathbf{R}$ sistemul $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = \alpha \end{cases}$ are patru soluţii: $|x| + |y| = 1$ ne dă un pătrat (romb) cu vârfurile $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ (în cele patru cadrane I, II, III, IV avem respectiv $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$) iar $x^2 + y^2 = (\sqrt{\alpha})^2$ este un cerc cu centrul în

$(0,0)$ de rază $\sqrt{\alpha}$. Patru soluţii avem când cercul este înscris sau circumscris pătratului, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

1.113B Soluţiile sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$: $y = 6 - x$, $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; altfel, $x + y = 6$, $xy = 8$.

1.114B Ordonaţi crescător numerele $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} - 1$, $z = \sqrt{5} - 2$, $2 - \sqrt{3} < \sqrt{2} - 1$, $3 < \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $9 < 5 + 2\sqrt{6}$, $2 < \sqrt{6}$ deci $x < y$; $\sqrt{5} - 2 < \sqrt{2} - 1$, $\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$, $5 + 2 - 2\sqrt{10} < 1$, $3 < \sqrt{10}$ deci $z < y$; $\sqrt{5} - 2 < 2 - \sqrt{3}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 4$, $8 + 2\sqrt{15} < 16$, $\sqrt{15} < 4$ deci $z < x$ ordinea este $z < x < y$.

1.115B Numărul $P = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ este impar: $\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n)}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)]}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) \cdot 2^n \cdot n!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) = (2n-1)!!$ deci P este impar.

1.116B Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ este bijectivă deci inversabilă: este continuă pe $(-\infty, 1)$ şi pe $(1, \infty)$ $x = 1$ este asimptotă verticală, $y = 2$ asimptotă orizontală $\mathrm{Im}f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ deci este surjectivă, $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi pe $(1, \infty)$ deci este injectivă (altfel $f(x_1) = \frac{2x_1-3}{x_1-1} = \frac{2x_2-3}{x_2-1} = f(x_2) \Rightarrow 2(x_2 - x_1) = 3(x_2 - x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$). Faptul că este inversabilă se verifică şi direct, calculând inversa: $y = \frac{2x-3}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x - 3$, $x = \frac{y-3}{y-2}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

1.117B Valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $m^2x - m = mx - 1$ are o singură soluţie număr întreg este $m = -1$: $x(m-1)m = m - 1 \Rightarrow m = 1$ identitate, $m \neq 1$ şi $m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m}$, deci $m = -1$.

1.118B Pentru ecuaţia $x^2 - (m+2)x + m = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 şi $m \in \mathbf{R}$, valorile lui m astfel ca $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = -4$ sunt $m = -1$: $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{(m+2)^3 - 3m(m+2)}{m} = -4 \Rightarrow m^3 + 3m^2 + 10m + 8 = 0$ deci $m = -1$ iar $m^2 + 2m + 8 = 0$ are rădăcini complexe.

1.119B Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care soluţiile ecuaţiei $2mx^2 + 4(m+1)x + 4m + 1 = 0$ sunt reale şi strict pozitive: $m \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$: $\Delta > 0$, $\Delta = -4m^2 + 6m + 4 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $S > 0$, $S = -\frac{2(m+1)}{m} > 0 \Rightarrow m \in (-1, 0)$ şi $P > 0$, $P = \frac{4m+1}{m} > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, \infty)$ deci $m \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

1.120B $m \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2 + y^2 - 2x - y - m \geq 0$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$: $x^2 + y^2 - 2x - y - m = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4} + m\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{4} + m \leq 0$ deci $m \leq -\frac{5}{4}$. Altfel: trinomul în x, $x^2 - 2x + (y^2 - y - m) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ dacă $\Delta y = 1 - (y^2 - y - m) \leq 0$ deci $y^2 - y - (m+1) \geq 0$ $\forall y \in \mathbf{R} \Rightarrow \Delta m = 4m + 5 \leq 0$.

1.121B Pentru sistemul $\begin{cases} x^2-y^2+xy=2 \\ x^2-2xy=2 \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ldots(x_n,y_n)$ şi $A=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $B=\sum_{k=1}^{n}y_k$ avem $A=B=0$: $(x^2-y^2+xy)-(x^2-2xy)=0$, $-y^2+3xy=0$ de unde $y=0$ şi $x=\pm\sqrt{2}$ sau $y=3x$, $x=\pm\frac{i}{\sqrt{5}}$, $y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}i$. Dacă luăm numai soluţiile reale, $A=B=0$ iar dacă luăm toate soluţiile avem tot $A=B=0$.

1.122B Soluţiile sistemului $\begin{cases} x+y=a+b \\ (ax+by)(bx+ay)=ab(a+b)^2 \end{cases}$ pentru $a\neq b$, $a,b\in\mathbf{R}$ sunt $\{(0,a+b),(a+b,0)\}$: $(a^2+b^2)xy+(x^2+y^2)ab=ab(a+b)^2\Rightarrow (a^2+b^2)xy+[(a+b)^2-2xy]ab=ab(a+b)^2\Rightarrow (a-b)^2xy=0$ deci $x=0$, $y=a+b$ sau $y=0$, $x=a+b$.

1.123B Funcţia $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ ax^2+bx, & x\geq 0 \end{cases}$ este bijectivă dacă: $a>0$, $b\geq 0$ sau $a=0$, $b>0$: graficul este o semidreaptă pentru $x<0$ urmat de o porţiune de parabolă pentru $x\geq 0$. f este crescătoare dacă $a>0$ şi $b\geq 0$ (sau dacă $a=0$, $b>0$) deoarece $x_V=-\frac{b}{2a}<0\Rightarrow$ pe $(0,\infty)$ f este crescătoare. Evident este surjectivă.

1.124B Soluţia inecuaţiei $|||x|+1|-1|\leq 1$ este $x\in[-1,1]$. $|x|+1>0\Rightarrow ||x|+1|=|x|+1$, deci $||x|+1-1|=||x||=|x|\leq 1$, $-1\leq x\leq 1$.

1.125B Expresia $E=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_1x_2}$ unde x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2-mx+m+3=0$ este egală cu $\frac{m^2-m-3}{m^2+6m+9}$: $E=\frac{x_1^1+x_2^2}{(x_1x_2)^2}+\frac{1}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{m^2-m-3}{(m+3)^2}$.

1.126B Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $(m-2)x^2-2x+(m-2)=0$ admite rădăcini reale distincte: $m\in(1,3)\setminus\{2\}$. $\Delta=1-(m-2)^2=-m^2+4m-3>0$, $m^2-4m+3<0$, $m\in(1,3)$; dar $m=+2$ nu convine deoarece avem o singură rădăcină $x=0$.

1.127B Coordonatele (x,y) ale vârfurilor parabolelor Γ_m : $y=mx^2+2(m-1)x+m+1$, $m\neq 0$ verifică relaţia $y=2-x$, $x\neq -1$. $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{2(m-1)}{2m}=-1+\frac{1}{m}$, $y_V=f(x_V)=m\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-2\frac{(m-1)^2}{m}+m+1=-\frac{(m-1)^2}{m}+m+1=3-\frac{1}{m}$, deci $x_V+y_V=2$ sau $x+y=2$. $x=-1$, $y=1$ nu este vârful nici unei parabole.

1.128B Soluţiile sistemului $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2+y^2-5y=0 \end{cases}$ sunt $(0,0)$ şi $(-2,4)$: $y=-2x$, $x^2+4x^2+10x=0$, $x=0$, $x=-2$ respectiv $y=0$, $y=4$.

1.129B Dacă $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x$, $g(x)=-x^2$ şi $a=(f\circ g)(1)$ atunci $a=f(g(x))|_{x=1}=3g(x)|_{x=1}=3(-x^2)|_{x=1}=-3$, $(g\circ f)=-(f(x))^2=-gx^2$.

1.130B Numărul n de soluţii reale ale ecuaţiei $|x|-\frac{1}{2}x=3$ este $n=2$: $x>0\Rightarrow x-\frac{x}{2}=3$, $x=6$ iar $x<0\Rightarrow -x-\frac{x}{2}=3$, $x=-2$ deci $n=2$.

1.131B Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$, $S=x_1^2+x_2^2$ verifică condiţia $S=25$ dacă $m\in\{5,-3\}$: $S=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-2)^2+2(m+3)=m^2-2m+10=25$, $m\in\{5,-3\}$.

1.132B Mulţimea $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+|x|-2\leq 0\}$ este $A=[-1,1]$: dacă $x\geq 0$, $x^2+x-2\leq 0$, $x_{1,2}=1,-2$ deci $x\in[-2,1]$, $x\geq 0$ rezultă $x\in[0,1]$; pentru $x\leq 0$, $x^2-x-2\leq 0$, $x_{1,2}=-1,2$, $x\in[-1,2]$ şi $x\leq 0$ deci $x\in[-1,0]$, rezultă $A=[-1,1]$.

1.133B Numărul de soluţii ale sistemului $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases}$. Avem $-5(2x^2+3xy+y^2)+7(6x^2+xy-y^2)=0$, $32x^2-8xy-12y^2=0$, $8x^2-2xy-3y^2=0$, $8-2\frac{y}{x}-3\left(\frac{y}{x}\right)^2=0\Rightarrow \frac{y}{x}=-2$, $\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$; înlocuim în una din ecuaţii succesiv $y=-2x$ sau $y=\frac{4}{3}x$ şi obţinem două soluţii $(3,4)$ şi $(-3,-4)$.

1.134B Trinomul $x^2-2(4m+3)x+6m+7$ este pătratul unui binom deci un pătrat perfect dacă $\Delta=(4m+3)^2-(6m+7)=2(8m^2+9m+1)=0$ deci $m=-1$ sau $m=-\frac{1}{8}$.

1.135B Valorile parametrului real m pentru care rădăcinile ecuaţiei $(m^2+1)x^2-(2m+1)x+1=0$ sunt mai mici sau egale cu 1; $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ verifică inegalitatea $m\geq\frac{3}{4}$. Facem schimbarea $x=y+1$, $x_1=y_1+1\leq 1$, $x_2=y_2+1\leq 1$ şi rezultă $y_1\leq 0$, $y_2\leq 0$ deci $\Delta\geq 0$, $S=y_1+y_2\leq 0$, $P=y_1y_2\geq 0$ pentru ecuaţia în y : $(m^2+1)y^2+y(2m^2-2m+1)+m^2-2m+1=0$. Δ poate fi calculat de la ecuaţia în x, $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+1)=4m-3\geq 0$ deci $m\geq\frac{3}{4}$. $S=y_1+y_2=-(2m^2-2m+1)=-[(m-1)^2+m^2]<0$, $P=(m-1)^2\geq 0$ deci rămâne condiţia $m\geq\frac{3}{4}$.

1.136B Dacă $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\leq 0 \\ 7x, & x>0 \end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq -2 \\ 2x-1, & x>-2 \end{cases}$ atunci $h=g\circ f$ este dată de $h(x)=\begin{cases} (2x-3)^2, & x\leq 0 \\ 14x-1, & x>0 \end{cases}$. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} (f(x))^2, f(x)\leq -2 \\ 2f(x)-1, f(x)>-2 \end{cases}$ dar $f(x)=2x-3<-2$ pentru $x<0$ şi $f(x)=7x>-2$ pentru $x>0$ deci $h(x)=\begin{cases} (2x-3)^2, & x\leq 0 \\ 14x-1, & x>0 \end{cases}$.

1.137B Soluţia ecuaţiei $1-x=|x+1|$ este $x=0$. Avem pentru $x<-1$, $1-x=-x-1$ imposibil şi pentru $x\geq -1$, $1-x=x+1\Rightarrow x=0$.

1.138B Mulţimea A a valorilor lui m pentru care rădăcinile x_1,x_2 ale ecuaţiei $x^2-5x+m=0$ sunt în intervalul (1,4) este $A=\left(4,\frac{25}{4}\right)$. Vezi problema 1.107B: se face schimbarea $y=\frac{x-1}{x-4}$ şi pentru ecuaţia în y obţinută se pun condiţiile $\Delta\geq 0$, $S=y_1+y_2<0$, $P=y_1y_2>0$.

1.139B Inecuaţia $(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)<4$ are soluţia $\emptyset$ (nu are soluţii): $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<2$, deci $t+\frac{1}{t}<2$ cu $t>0$. $t^2-2t+1<0$, $(t-1)^2<0$ fals.

1.140B Funcţiile $f(x)=2x^4+3x^3+4$ şi $g(x)=x^3+x+2$ sunt prima neinjectivă a doua injectivă deoarece spre exemplu $f(0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=4$. $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1^3-x_2^3+x_1-x_2=0$, $(x_1-x_2)\left[(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}x_2^2+1\right]=0\Rightarrow x_1=x_2$.

1.141B Inecuaţia $|x-3|>x-1$ este verificată pentru $x\in(-\infty,2)$: $x>3\Rightarrow x-3>x-1$ fals, $x<3\Rightarrow -x+3>x-1$, $2x<4$, $x<2$.

1.142B Valoarea parametrului $m\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuaţiile $x^2+mx+1=0$, $x^2+x+m=0$ să aibă exact o soluţie reală comună este $m=-2$: notăm x_0 rădăcina comună, $(x_0^2+mx_0+1)-(x_0^2+x_0+m)=0\Rightarrow x_0(m-1)-(m-1)=0$, $(m-1)(x_0-1)=0$. Dacă $m=1$ avem două rădăcini comune, dacă $m\neq 1\Rightarrow x_0=1$, $m=-2$.

1.143B Aflaţi funcţia $f(x)=ax^2+bx+c$ care verifică condiţiile $f(-1)=13$, $f(2)=10$ şi are un minim egal cu 9: $x_V=-\frac{b}{2a}$, $f(x_V)=9$, $a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}=9$, $b^2-4ac=-36a$, $a-b+c=13$, $4a+2b+c=10$, $a+b=-1\Rightarrow b^2-4a(13-a+b)=-36a$, $(-1-a)^2-4a(13-2a-1)=-36a$, $9a^2-10a+1=0$, $a_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{9}=\frac{5\pm 4}{9}$, $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{9}$, $b_1=-2$, $b_2=-\frac{10}{9}$, $c_1=10$, $c_2=\frac{106}{9}$ deci polinoamele sunt $f(x)=x^2-2x+10$ sau $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{106}{9}$.

1.144B Soluţiile sistemului $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{16}$ sunt (4,16), (16,4). Se observă că $x,y>0$; notăm $\sqrt{\frac{y}{x}}=t$, $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, $t_1=2$, $t_2=\frac{1}{2}$, $\frac{y}{x}=4$, $\frac{y}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{4x}=\frac{5}{16}$, $x=4$, $y=16$, $\frac{1}{x}+\frac{4}{x}=\frac{5}{16}$, $x=16$, $y=4$.

1.145C Valorile $n\in\mathbf{N}$ pentru care expresia $E=\sqrt[n+1]{\sqrt[4-n]{n^2+n+1}}$ are sens sunt 1 şi 2. Condiţiile sunt $n+1\geq 2$, $4-n\geq 2$ unde $n+1$ şi $4-n$ trebuie să fie numere naturale ≥ 2 deci $1\leq n\leq 2$, adică $n=1$ sau $n=2$.

1.146C Pentru funcţiile $f,g,h:\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$, $h(x)=-\frac{1}{x}$ una din următoarele relaţii este adevărată: a) $f\circ f=g$; b) $f\circ f=h$; c) $g\circ g=f$; d) $g\circ g=h$; e) $h\circ h=f$; f) $h\circ h=g$. Verificând grila observăm că se verifică d) $g\circ g=h$; $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1-x+1+x}{1-x-1-x}=\frac{2}{-2x}=-\frac{1}{x}=h(x)$.

1.147C Pentru ca funcţia $f(x)=\begin{cases}ax+2 & x\leq 1\\ x+2a & x>1\end{cases}$ să fie injectivă, parametrul a trebuie să verifice condiţia $1\leq a$. Dacă $a<0$, $y=ax+2$, $x\leq 1$ este descrescătoare iar $y=x+2a$, $x>1$ este crescătoare, deci f nu este injectivă, deci $a>0$. Mai trebuie verificată şi condiţia evidentă între ordonatele din stânga şi dreapta $a+2\leq 1+2a$, deci $1\leq a$.

1.148C Să se rezolve ecuaţia $f(f(x))=1$ dacă $f(x)=\frac{m+nx}{n+mx}$, $n\neq m$. $f(f(x))=\frac{m+n\frac{m+nx}{n+mx}}{n+m\frac{m+nx}{n+mx}}=\frac{2mn+(m^2+n^2)x}{n^2+m^2+2mnx}=1\Rightarrow(m-n)^2(x-1)=0$, $x=1$.

1.149C Fie funcţiile $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ şi $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. $g(x)=\begin{cases}x^2-6x+11, & x\geq 3\\ x-1, & x<3\end{cases}$. Atunci $g^{-1}(3)=4$ deci f). Verificând grila se observă că $g(4)=16-24+11=3$, deci $g^{-1}(3)=4$.

1.150C Să se rezolve ecuaţia $f(x)f^{-1}(x)=1$ unde $f(x)=3x+2$. Din $y=3x+2$ rezultă $x=\frac{1}{3}(y-2)$, deci $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-2)$ de unde $f(x)\cdot f^{-1}(x)=(3x+2)\cdot\frac{1}{3}(x-2)=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=1\Rightarrow x=-1$, $x=\frac{7}{3}$.

1.151C Dacă Δ,P şi S sunt discriminantul, produsul şi suma soluţiilor ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ şi a,Δ,P,S sunt în această ordine numere întregi consecutive atunci produsul abc are valoare 2: numerele sunt a, $\Delta=b^2-4ac$, $P=\frac{c}{a}$, $S=-\frac{b}{a}$ deci a, $b^2-4ac=a+1$, $\frac{c}{a}=a+2$, $-\frac{b}{a}=a+3\Rightarrow c=a^2+2a$, $b=-a^2-3a$, $(a^2+3a)^2-4a(a^2+2a)=a+1\Rightarrow a^4+2a^3+a^2-a-1=0$ deci $a=-1$, $b=2$, $c=-1$ iar produsul $abc=2$.

1.152C Condiţia $f(x)\leq g(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, unde $f(x)=mx+2$, $g(x)=3x+m$ este verificată pentru $m=3$: $mx+2\leq 3x+m\Rightarrow x(m-3)\leq m-2$; dacă $m\neq 3$ avem $x\leq\frac{m-2}{m-3}$ sau $x\geq\frac{m-2}{m-3}$ după cum $m>3$ sau $m<3$ deci condiţia nu este verificată pentru orice x; dacă $m=3$, avem $0<1$ deci se verifică.

1.153C Soluţia ecuaţiei $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=1$ este $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x+1+1-x-2\sqrt{1-x^2}=1$, $1=2\sqrt{1-x^2}$, $4x^2=3$, $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ dar $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ nu verifică ecuaţia, $\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}<0$ nu poate fi 1 dar $\frac{\sqrt{3}}{2}$ verifică ecuaţia, $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$ evident.

1.154C Dacă $a,b,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $\beta^2+\alpha<0$ atunci ecuaţia $ax^2+bx+\alpha a+\beta b=0$ are soluţii reale distincte: $\Delta=b^2-4(a\beta)b-4\alpha a^2>0$ $(\forall)b\in\mathbf{R}$.

dacă $\Delta_1 = \Delta_b = (2a\beta)^2 + 4\alpha a^2 = 4a^2(\beta^2 + \alpha) < 0$ deoarece $\beta^2 + \alpha < 0$, $a \neq 0$ deci $\Delta > 0$ şi ecuaţia are două rădăcini reale şi distincte.

1.155C Valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ admite soluţie reală unică este $m = -1 : y = m - x$, $x^2 + z^2 - 2(m-x) + 2z = 0$, $x^2 + z^2 + 2x + 2z = 2m$, $(x+1)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{2(m+1)})^2$, $m \geq -1$. Soluţia este unică pentru $m = -1 \Rightarrow x = -1$, $z = -1$, $y = 0$.

1.156C Pentru funcţia $f(x) = \frac{x^2-x+a}{x^2+x+1}$ avem $\mathrm{Im} f = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ dacă $a = 1$. Condiţia $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2-x+a}{x^2+x+1} \leq 3$ echivalentă cu inegalităţile $2x^2 + 4x + 3 - a \geq 0$, $2x^2 - 4x + 3a - 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ deci $\Delta_1 = 2a - 2 \leq 0$ respectiv $\Delta_2 = 6 - 6a \leq 0$ ne dau $a \leq 1$ respectiv $1 \leq a$, deci $a = 1$.

1.157C Relaţia care există între $a, b, c \in \mathbf{R}$ pentru ca funcţia $f(x) = ax|x| + bx + c$ să fie bijectivă este $a \cdot b \geq 0$: graficul lui

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geq 0, p_1 \\ -ax^2 + bx + c, & x < 0, p_2 \end{cases}$$

este dat de două porţiuni de parabolă p_1 şi p_2 racordate în $x = 0$, $y = c$ şi trebuie să fie monotonă (strict crescătoare pentru $a > 0$, respectiv strict descrescătoare pentru $a < 0$) pentru aceasta este necesar ca abscisa vârfurilor corespunzătoare lui p_1 respectiv p_2, $x_V = -\frac{b}{2a}$ respectiv $x_V = \frac{b}{2a}$ să fie $x_V \leq 0$ respectiv $x_V \geq 0$ (pentru $a > 0$) şi invers pentru $a < 0$ deci $a \cdot b \geq 0$.

1.158C Condiţia ca $\mathrm{Im} f \subset [-3, 2]$ pentru $f(x) = \frac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}$ este $a \in A = [-4, 0]$. Procedăm ca în 1.156C, $-3 \leq \frac{x^2+ax+1}{x^2-x+1} \leq 2$ obţinem inegalităţile $0 \leq 4x^2 + x(a-3) + 4$ cu $\Delta_1 = (a-3)^2 - 64 = a^2 - 6a - 55 \leq 0$ deci $a \in [-5, 11]$ şi $x^2 - x(a+2) - 1 \geq 0$ cu $\Delta_2 = a^2 + 4a \leq 0$ deci $a \in [-4, 0]$. Intersecţia celor două intervale este $[-4, 0]$.

1.159C Soluţiile raţionale ale sistemului $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases} : x = 2, y = -1$; $y = 3 - 2x$, $x^3 + (3-2x)^3 = 7$, $-7x^3 + 36x^2 - 54x + 20 = 0$, $-7x^3 + 14x^2 + 22x^2 - 44x - 10x + 20 = 0$, $-7x^2(x-2) + 22x(x-2) - 10(x-2) = 0$, $(x-2)(-7x^2 + 22x - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{51}}{7}$ deci $x = 2$, $y = -1$.

1.160C Fie $f, g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = 2n - 1$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \\ n, & n \text{ par} \end{cases}$. Atunci $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$. $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = \begin{cases} \frac{f(n)+1}{2}, & f(n) \text{ impar} \\ f(n), & f(n) \text{ par} \end{cases} = \frac{f(n)+1}{2}$

deoarece $f(n) = 2n - 1$ este impar deci $(g \circ f)(n) = \frac{2n-1+1}{2} = n = 1_{\mathbf{N}}(n)$, adică $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$.

1.161C Funcţia $f(x) = \begin{cases} ax - 2, & x \leq 1 \\ x - 2a, & x > 1 \end{cases}$ este injectivă dacă $a \in (0, 1]$. Analog cu 1.147C utilizând graficul găsim condiţiile $a > 0$ şi $a - 2 \leq 1 - 2a$, $a \leq 1$ deci $a \in (0, 1]$.

1.162C Fie ecuaţia $(m+1)x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$ şi mulţimile $A = \{m \in \mathbf{R} |$ ecuaţia are două soluţii strict pozitive $\}$, $B = \{m \in \mathbf{R} |$ ecuaţia are soluţii de acelaşi semn $\}$. Atunci $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) = 4m + 5 \geq 0$ deci $m \geq -\frac{5}{4}$, $S = \frac{2m+1}{m+1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ şi $P = \frac{m-1}{m+1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; rezultă $A \cap B = \left[-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (1, \infty)$.

1.163C Dacă $f(x) = \frac{mx^2+x+m}{x^2+1}$ şi $A = \{m \in \mathbf{R}, \mathrm{Im} f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\}$, atunci $A = \{+1\}$. Se procedează ca în 1.156C, 1.158C scriind $\frac{1}{2} \leq \frac{mx^2+x+m}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Altfel, se ştie că $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ (se verifică uşor) deci $\frac{1}{2} \leq m - \frac{1}{2} \leq m + \frac{x}{x^2+1} \leq m + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq m \leq 1$ deci $m = 1$, $A = \{+1\}$.

1.164C În sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ şi $A = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} y_k$, avem $A = B = 0$. $|x - y| = 1 \Rightarrow x - y = \pm 1$.

1) $y = x - 1$, $2x^2 - 2x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$;

2) $y = x + 1$, $2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $y_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, deci $A = B = 0$. Toate cele patru soluţii verifică sistemul. Altfel, $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = 1$, $(x+y)^2 - 2xy = 2$ etc.

1.165C Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{1331_{(x)}} + \sqrt{121_{(y)}} = 9$, unde indicele inferior reprezintă baza de numeraţie în care este exprimat numărul indexat este $x = 4$, $y = 3$. Avem $x, y \in \mathbf{N}$, $x \geq 4$, $y \geq 3$ şi ecuaţia se scrie $(x+1) + (y+1) = 9$ cu singura soluţie $x = 4$, $y = 3$.

1.166C Soluţiile inecuaţiei $\left(a\frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a\frac{y}{x} + b\right)^2 \geq 2(a+b)^2$, $x, y > 0$, $a, b > 0$ sunt: $(x, y) \in (R_+^*)^2$. Inecuaţia se scrie $a^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + 2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2a^2 + 4ab$. Dar $t + \frac{1}{t} \geq 2$ pentru $\forall t > 0$, deci $a^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \geq 2a^2$, $2ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2(2ab)$ şi prin adunare obţinem inegalitatea dată, verificată pentru $\forall x, y \in R_+^*$.

1.167C Soluţia ecuaţiei $x^2 + y^2 - 2[a(x+y) + b(x-y) - (c^2 + d^2)] = 0$,

$a, b, c, d \in \mathbf{R}$ în condiţiile $ab = cd$, $a + c = b + d$ este $x = a + b$, $y = a - b$. Din $ab = cd$ şi $a - b = d - c \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = d^2 + c^2 - 2dc$ deci $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Ecuaţia devine $x^2 - 2(a + b)x + y^2 - 2(a - b)y + 2(c^2 + d^2) = 0$ $\Rightarrow [x - (a + b)]^2 + [y - (a - b)]^2 - [(a + b)^2 + (a - b)^2] + 2(c^2 + d^2) = 0$ de unde $[x - (a + b)]^2 + [y - (a - b)]^2 = 0 \Rightarrow x = a + b$, $y = a - b$.

1.168C Minimul expresiei $E(x, y) = 4x^2 + 12xy + 10y^2 - 20x - 32y + 33$, $x, y \in \mathbf{R}$ este $E = 7$. Observăm că $E(x, y) = (2x + 3y - 5)^2 + y^2 - 2y + 8 = (2x + 3y - 5)^2 + (y - 1)^2 - 7$ deci minimul este 7 obţinut pentru $y = 1$, $x = 1$. Altfel: $4\left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) + y^2 - 20x - 32y + 8 = 4\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \ldots$ şi notăm $X = x + \frac{3}{2}y$, $Y = y$, restrângând apoi pătratele în X, Y. Mai putem considera trinomul în x cu coeficienţi în y (y parametru) $4x^2 + 2x(6y - 10) + 10y^2 - 32y + 33$ şi calculând ordonata vârfului $u_V = f(x_V)$ (în variabilele (x, u)), $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(6y-10)}{2\cdot 4} = -\frac{3y-5}{2}$, $u_V = 4\left(\frac{3y-5}{2}\right)^2 - \frac{4(3y-5)^2}{2} + 10y^2 - 3y + 33 = -(3y - 5)^2 + 10y^2 - 32y + 33 = y^2 - 2y + 8 = (y - 1)^2 + 7 \geq 7$.

1.169C Se cere valoarea parametrului $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $\frac{xy}{x+y} < 0$ unde (x, y) este o soluţie oarecare a sistemului $x^3 + y^3 - 2(x + y) = 25a$, $x^2 - xy + y^2 = 7$. Notăm $x + y = s$, $xy = p$ şi obţinem $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 2(x + y) = 25a$, $(x + y)^2 - 3xy = 7$, $s^3 - 3ps - 2s = 25a$, $s^2 - 3p = 7$. Se obţine $s = 5a$, $p = \frac{25a^2-7}{3}$, $\frac{p}{s} = \frac{25a^2-7}{15a} < 0$, $a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{7}}{5}\right)$.

1.170C Fie $A = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in Q\}$ şi $\alpha = \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$. Atunci $\alpha \in A$. Observăm că $99 - 70\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^3$ deci $\alpha = 3 - 2\sqrt{2} \in A$.

1.171C Dacă $A = \mathrm{Im} f$ şi $I = \mathbf{R} \setminus Q$ unde $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in Q$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, atunci $A \cap I = I$. Fie $y \in \mathbf{R}$, $y \neq \frac{a}{c}$ astfel ca $\frac{ax+b}{cx+d} = y$ de unde $x = \frac{dy-b}{a-cy}$. Deoarece $\frac{a}{c} \in Q$, $\frac{a}{c} \notin I$, deci $A \cap I = I$.

1.172C Maximul sumei $x_0 + y_0 + z_0 = s_0$ unde (x_0, y_0, z_0) este soluţie reală a sistemului $2x = y + \frac{2}{y}$, $2y = z + \frac{2}{z}$, $2z = x + \frac{2}{x}$, este $3\sqrt{2}$. Sistemul se scrie $y^2 - 2xy + 2 = 0$, $z^2 - 2yz + 2 = 0$, $x^2 - 2zx + 2 = 0$ şi deoarece $x, y, z \in \mathbf{R}$ rezultă $x^2 - 2 \geq 0$, $y^2 - 2 \geq 0$, $z^2 - 2 \geq 0$ (spre exemplu pentru ecuaţia $y^2 - 2xy + 2 = 0$ discriminantul $\Delta = x^2 - 2 \geq 0$). Observăm că x, y, z ori sunt toate pozitive ori toate negative. Presupunem toate pozitive, deci $x \geq \sqrt{2}$, $y \geq \sqrt{2}$, $z \geq \sqrt{2}$ şi toate distincte; alegem $x < y < z$. $2(x - z) = y - x + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, $2(x - z) = (y - x)\left[1 - \frac{2}{xy}\right]$. Dar $x - z < 0$, $y - x > 0$ deci $1 - \frac{2}{xy} < 0$, $xy < 2$ în contradicţie cu $x \geq \sqrt{2}$, $y \geq \sqrt{2}$ ($xy > 2$). Deci x, y, z nu pot fi toate distincte; fie $x = y$ din ultima relaţie rezultă $x = z$ deci $x = y = z$ de unde $x = y = z = \sqrt{2}$. Similar în cazul $x, y, z < 0$ şi rezultă $x = y = z = -\sqrt{2}$. Soluţiile sunt $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ şi $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ şi maximul lui s_0 este $3\sqrt{2}$.

1.173C Dacă ecuaţia $x^2 - |x| + m = 0$, $m \in \mathbf{R}$, are trei soluţii reale distincte, atunci $m = 0$. În ambele cazuri şi $x < 0$ şi $x > 0$, $\Delta = 1 - 4m > 0$, $m < \frac{1}{4}$ dar pentru anumite valori ale lui m putem avea 4 rădăcini. Trei rădăcini rămân pentru $m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

1.174C Numerele $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 x_2 = \alpha$ şi $|x_1 - x_2| = \beta$. Atunci $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. R. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \beta$, $(x_1 + x_2)^2 = \beta^2 + 4\alpha \geq 0$.

1.175C Perechile de numere raţionale (x, y) care satisfac egalităţile $xy = x + y = x^2 - y^2$ sunt în număr de una. $x + y = (x + y)(x - y) \Rightarrow (x + y)[(x - y) - 1] = 0$ deci $x + y = 0$ sau $x - y = 1$ de unde $x = y = 0$ sau $y = x - 1$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ care nu sunt raţionale, deci rămâne (0,0), una.

1.176C Câte soluţii distincte $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ are ecuaţia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{q-2}{2q}$, $p = \frac{2q}{q-2} = 2 + \frac{4}{q-2} \Rightarrow q - 2 = \pm 1$, $q - 2 = \pm 2$, $q - 2 = \pm 4$ de unde rezultă $p = q = 4$, $p = 3$, $q = 6$, $p = 6$, $q = 3$ deci sunt trei soluţii.

1.177C Nici un număr de forma $111 \ldots 11$, $n \geq 2$ cifre nu este pătratul unui întreg: pătratul oricărui număr este de forma $4p$ sau $4p + 1$ dar $111 \ldots 11 = 111 \ldots 100 + 4 \cdot 2 + 3 = 4p + 3$.

1.178C Fie m şi n numere naturale. Împărţim $m^2 + n^2$ la $m + n$ şi obţinem câtul q şi restul r. Să se determine toate perechile (m, n) pentru care avem $q^2 + r = 17$, $q, r \in \mathbf{N}$. Evident avem perechile $r = 1$, $q = 4$; $r = 8$, $q = 3$; $r = 13$, $q = 2$; $r = 16$, $q = 1$. Luând pe rând toate cazurile obţinem perechile (2,5) şi (5,2), spre exemplu $r = 1$, $q = 4 \Rightarrow m^2 + n^2 = (m + n)4 + 1$, $(m - 2)^2 + (n - 2)^2 = 3^2$ deci $m = 2$, $n = 5$ sau $m = 5$, $n = 2$ iar $r = 13$, $q = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = (m + n)2 + 13$, $(m - 1)^2 + (n - 1)^2 = 11$, nu există $m, n \in \mathbf{N}$ etc.

1.179C Soluţia inecuaţiei $||x + 1| - 1| \leq 3$ este $[-5, 3]$: $-3 \leq |x + 1| - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq |x + 1| \leq 4$ deci $|x + 1| \leq 4$, $-4 \leq x + 1 \leq 4$, $-5 \leq x \leq 3$.

1.180C $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le -1\\ 2x+3, & x>-1\end{cases}$ are inversa $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(x-3), & x>1\end{cases}$
Din $y=-x^2+1$, $x\le -1$ rezultă $x=-\sqrt{1-y}$, $y\le 0$, iar pentru $x>-1$, $y=2x+3$, $y>1$, $x=\frac{1}{2}(y-3)$, $y>1$ deci schimbând y cu x
$x=\begin{cases}-\sqrt{1-y}, & y\le 0\\ \frac{1}{2}(y-3), & y>1\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(x-3), & x>1\end{cases}$.

1.181C Graficele funcţiilor $f_m(x)=mx^2+2(m+1)x+(m+2)$, $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ sunt tangente toate în $M_0(-1,0)$. Evident toate trec prin M_0, $0=m-2(m+1)+m+2$, $(\forall)m\in\mathbf{R}$. $f'_m(-1)=[2mx+2(m+1)]|_{x=-1}=2$ deci toate sunt tangente în M_0. Algebric, intersectăm două parabole oarecare $f_{m_1}(x)$, $f_{m_2}(x)$, $m_1\ne m_2$ şi rezultă că au un singur punct de intersecţie $(-1,0)$, deci sunt tangente în $(-1,0)$, $m_1x^2+2(m_1+1)x+m_1+2=m_2x^2+2(m_2+1)x+m_2+2\Rightarrow(m_1-m_2)[x^2+2x+1]=0$, $(m_1-m_2)(x+1)^2=0$, $m_1\ne m_2\Rightarrow x=-1$, $y=0$.

1.182C Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât

$$\{x\in\mathbf{R}|mx^2+(5m-3)x+13m+15=0\}\cap[-1,2]\ne\emptyset.$$

Se procedează ca în 1.138B, 1.107B, $x_1,x_2\in[-1,2]$ sau $x_1\in[-1,2]$, $x_2\notin[-1,2]$. Ultima condiţie se scrie: $\Delta>0$, $f(-1)f(2)<0$. $m\in\left[-2,-\frac{1}{3}\right]$.

1.183C Dacă $f(x)=ax+b$ verifică condiţia $f\circ f=1_{\mathbf{R}}$ atunci $a=1$, $b=0$ au $a=-1$, $b\in\mathbf{R}$. Avem $f(f(x))=a^2x+ab+b=x$, $a^2=1$, $b(1+a)=0\Rightarrow a=\pm1$, $b=0$ sau $b\in\mathbf{R}$.

1.184C Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$ ($[a]$ = partea întreagă a lui a). Avem $[a]\le a<[a]+1$, deci $\frac{x-1}{2}\le\frac{x+1}{3}<\frac{x-1}{2}+1=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 3x-3\le 2x+2$ deci $x\le 5$, $2x+2<3x+3$ deci $-1<x$ sau $-1<x\le 5$. Probăm care din valorile $\frac{x-1}{2}=0$, 1,2, verificăm: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$.

1.185C Ecuaţia $x^2-2|x|=0$ are soluţiile $-2,0,2$ deci trei soluţii: $x\ge 0\Rightarrow x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=2$; $x<0\Rightarrow x^2+2x=0$, $x=-2$.

1.186C Valorile parametrului $m\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul $x^2+y^2=z$, $x+y+z=m$ are o soluţie reală unică: $x^2+y^2=m-x-y$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{m+\frac{1}{2}}\right)^2\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$, $x=y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$.

1.187C Valoarea sumei $S=x+y+u+v$ ştiind că x,y,u,v verifică sistemul $x+y=3$, $xu+yv=-1$, $xu^2+yv^2=3$, $xu^3+yv^3=-1$. Sistemul este asemănător cu 1.39A, x,y este schimbat în u,v şi invers iar termenii liberi sunt alţii; avem $S=3$.

1.2 Funcţia exponenţială şi logaritmică

1.188A Soluţiile ecuaţiei $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt6}\right)^x=10$ sunt $x=\pm2$, $\{\pm2\}:5-2\sqrt6=\frac{1}{5+2\sqrt6}\cdot\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=t$, $t+\frac{1}{t}=10$, $t^2-10t+1=0$, $t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt6$, $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=5\pm2\sqrt6$, $x=\pm2$.

1.189A Numărul soluţiior ecuaţiei $3^{|x|}+4^{|x|}+5^{|x|}=12$ este doi. Funcţia $f(x)=3^x+4^x+5^x$, $x\ge0$ este crescătoare (sumă de funcţii crescătoare), $\mathrm{Im}f=[3,\infty)$, valoarea 12 ese luată într-un singur punct x_0, $f(x_0)=12$. Evident $f(-x_0)=12$, deci două soluţii.

1.190A Ecuaţia $3\lg^2x^2-\lg x-1=0$ are soluţiile $x_1=\sqrt[3]{10}$, $x_2=\sqrt[4]{10^{-1}}$: $12\lg^2x-\lg x-1=0$, $(\lg x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\frac{1\pm7}{24}\Rightarrow x_1=\sqrt[3]{10}$, $x_2=\sqrt[4]{10^{-1}}$.

1.191A Ecuaţia $\log_2x+\log_3x=1$ are soluţia $x=10^{\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}}$. Ecuaţia se scrie: $\frac{\lg x}{\lg2}+\frac{\lg x}{\lg3}=1\Rightarrow\lg x=\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}$, $x=10^{\frac{\lg2\cdot\lg3}{\lg6}}$.

1.192A Soluţia ecuaţiei $\log_{x+2}x+\log_x(x+2)=\frac{5}{2}$ este $x=2$. Notăm $\log_{x+2}x=t$, $x>0$, $\log_x(x+2)=\frac{1}{\log_{x+2}x}=\frac{1}{t}$, $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, $t_1=2$, $t_2=\frac{1}{2}$.

1.193A Ecuaţia $16^{|x|}-2\cdot4^{|x|}-8=0$ are soluţiile $x=\pm1$, $x\in\{1,-1\}$. $(4^{|x|})_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3\Rightarrow4^{|x|}=4$ deci $x=\pm1$.

1.194A Soluţiile inecuaţiei $9^x-5\cdot3^x+6<0$ sunt $x\in\left(\frac{\ln2}{\ln3},1\right)$. Rădăcinile ecuaţiei $(3^x)^2-5\cdot3^x+6=0$ sunt $3^x=2$, $3^x=3$ deci $2<3^x<3\Rightarrow\log_32<x<1$, $\frac{\ln2}{\ln3}<x<1$.

1.195A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}=2^x-1$. Avem $\sqrt{(2^x-1)^2}=|2^x-1|$ deci $|2^x-1|=2^x-1$ pentru $x\ge0$ deci este o identitate pentru $x\ge0$.

1.196A Soluţia inecuaţiei $\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$ este $A=\left(0,\log_2\frac{3}{4}\right)\cup(1,\infty)$. Notăm $2^x=t>0$, $\frac{1}{t-1}>\frac{2}{2-t}\Rightarrow\frac{4-3t}{(t-1)(t-2)}<0$, $t>0$ deci $1<t<\frac{4}{3}$ şi $2<t<\infty$ sau $1<2^x<\frac{4}{3}$, $2<2^x<\infty\Rightarrow x\in\left(0,\log_2\frac{3}{4}\right)\cup(1,\infty)$.

1.197A Inecuaţia $(2-\sqrt3)^x+(2+\sqrt3)^x\ge4$ are soluţia $|x|\ge1$. Notăm $(2+\sqrt3)^x=t$, $(2-\sqrt3)^x=\frac{1}{(2+\sqrt3)^x}=\frac{1}{t}$, $t>0$, $t+\frac{1}{t}\ge4$, $t<2-\sqrt3$ sau

$2+\sqrt{3}<t$, $(2+\sqrt{3})^x<2-\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{-1}\Rightarrow x<-1$, $(2+\sqrt{3})^1<(2+\sqrt{3})^x\Rightarrow 1\le x$ deci $|x|\ge 1$.

1.198A $(2x^2-x+1)^{x+1}>1$ are soluţia $(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: $2x^2-x+1>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$; dacă $2x^2-x+1>1\Rightarrow x+1>0$, $x>-1$, $x(2x-1)>0$, $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},\infty)$ deci $x\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; dacă $2x^2-x+1<1\Rightarrow x+1<0$, $x<-1$, $x(2x-1)<0$, $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap(-\infty,-1)=\emptyset$. Prin urmare $x\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

1.199A Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)$ este dat de $\frac{x+4}{x}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$.

1.200A Valoarea maximă a funcţiei $f(x)=(\log_3 x)^2+2(\log_3 x)\cdot(\log_3\frac{9}{x})$, $x>0$ este 4. Notăm $\log_3 x=t\in(-\infty,\infty)$, $g(t)=t^2+2\cdot t(2-t)=-t^2+4t=-[(t-2)^2-4]=4-(t-2)^2\le 4$.

1.201 Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât $\log_{\frac{m-1}{m+1}}(x^2+3)\ge 1$ $\forall x\in\mathbf{R}$ sunt $m\in(-\infty,-2)$. Domeniul $m\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

1°. $m>1\Rightarrow\frac{m-1}{m+1}<1\Rightarrow x^2+3\le\frac{m-1}{m+1}$, $(m+1)x^2+2m+4\le 0$, $m\in\emptyset$;

2°. $m<-1\Rightarrow\frac{m-1}{m+1}>1\Rightarrow x^2+3\ge\frac{m-1}{m+1}\Rightarrow(m+1)x^2+2m+4\le 0$, $m<-2$.

1.202A Inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x}{x^2+2}<0$ are soluţia $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x}{x^2+2}<0=\log_{\frac{1}{2}}1\Rightarrow\frac{2x^2+x}{x^2+2}>1$, $x^2+x-2>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)\subset D=\mathbf{R}\setminus\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

1.203A Produsul soluţiilor ecuaţiei $x^{\log_2 x-2}=256$ este $x_1\cdot x_2=4$. Logaritmăm, $\log_2 x=t$, $t^2-2t-8=0$, $t_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}$, $t_1=4$, $t_2=-2$ $\Rightarrow x_1\cdot x_2=4$.

1.204A Soluţia ecuaţiei $\log_3 x+\log_5 x=1$ verifică relaţia $\ln x=\frac{\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 3+\ln 5}$, $\frac{\ln x}{\ln 3}+\frac{\ln x}{\ln 5}=1$, $\ln x=\frac{\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 5+\ln 3}$.

1.205A Soluţia sistemului $\begin{cases}x^2+16y^2=17\\ \log_2 x-\log_4 y=3\end{cases}$ verifică relaţia $xy=1$. $\log_2 x=2\log_4 x=\log_4 x^2\Rightarrow\log_2 x-\log_4 y=\log_4\frac{x^2}{y}=3$, $\frac{x^2}{y}=4^3$, $y=\frac{x^2}{64}$, $x^2+\frac{x^4}{256}=17$, $(x^2)_{1,2}=-128\pm\sqrt{128^2+17\cdot 256}=-128\pm 3\cdot 2^4=16(-8\pm 3)$.

1.206A Soluţiile ecuaţiei $\ln^2 x-4\ln x+3=0$ sunt $\ln x=1$, $x=e$, $\ln x=3$, $x=e^3$.

1.207A Dacă $\alpha=\log_{40}100$ şi $\beta=\log_{10}20$ atunci $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$. $\alpha=\frac{\lg 100}{\lg 40}=\frac{2}{1+2\lg 2}$, $\beta=\lg_2+1$, $\lg 2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)$, $\beta=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}$.

1.208A Inegalitatea $3^x+4^x+5^x<6^x$ este verificată pentru $x>3$. Funcţia

$f(x)=\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x$ este descrescătoare (sumă de funcţii descrescătoare, $y=a^x$ este descrescătoare pentru $0<a<1$), $f(3)=1$, $f(x)<1$ pentru $x>3$ (vezi 1.253, $3^x+4^x+5^x\ge 6^x$, $x\le 3$).

1.209A Soluţia ecuaţiei $3^{x+1}=9^{\sqrt{x}}$ este $x=1$: $3^{x+1}=3^{2\sqrt{x}}\Rightarrow x+1=2\sqrt{x}\Rightarrow(\sqrt{x}-1)^2=0$, $x=1$.

1.210A Ecuaţia $2^{3x}-2^{x+1}-4=0$ are soluţia $x=1$; $(2^x)^3-2\cdot 2^x-4=0\Rightarrow 2^x=2$ (soluţie reală unică) deci $x=1$.

1.211A $3^{\log_{\frac{1}{2}}x}>1=3^0\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x>0=\log_{\frac{1}{2}}1\Rightarrow x\in(0,1)$.

1.212A Ecuaţia $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=8$ are soluţia $x=\sqrt{65}$. Se verifică direct, $(\sqrt{65})^{\log_{65}64}=(65)^{\frac{1}{2}\log_{65}64}=(65)^{\log_{65}\sqrt{64}}=8(a^{\log_a x}=x)$. Altfel: $(x^2)^{\log_{x^2}\sqrt{x^2-1}}=8\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=8$, $x=\sqrt{65}$.

1.213A Inecuaţia $\ln e^x+e^{\ln x}<2$ deci $2x<2$ are soluţia $0<x<1$.

1.214A Produsul soluţiilor ecuaţiei $\log_4^2(x+1)-3\log_2(2x+2)=\frac{33}{4}$ este $7(2^{-3}-2^{12})$: $\log_2(2x+2)=1+\log_4(x+1)^2$, $\log_4(x+1)=t$, $t^2-6t-\frac{45}{4}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{15}{2},-\frac{3}{2}$, $x_1=2^{15}-1$, $x_2=-\frac{7}{8}$, $x_1x_2=7(2^{-3}-2^{12})$.

1.215A Soluţia ecuaţiei $\log_{|x|}2=2$ este $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ deoarece $|x|^2=2\Rightarrow|x|=\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{2}$.

1.216A Numărul n al soluţiilor reale ale ecuaţiei $(7^x-3)(7^x+1)=0$ este $n=1$ deoarece $7^x=-1$ nu are soluţii iar $7^x=3$ are o soluţie $x=\log_7 3$.

1.217A Să se rezolve ecuaţia $x^{\lg x}=100x$, $x>0$. $(\lg x)^2=2+\lg x$. $(\lg x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$, $\lg x=2$, $x=100$, $\lg x=-1$, $x=\frac{1}{10}$.

1.218A $\log_{16}(x-2)+\log_2 5=10\Rightarrow x=2+16^{10-\log_2 5}=2+\frac{16^{10}}{5^4}$.

1.219A Dacă $a\in(0,1)$, numerele $m=a^{1+\sqrt{6}}$, $n=a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ verifică inegalitatea $m<n$ deoarece exponenţiala cu baza subunitară este descrescătoare (inversează inegalităţile) deci $1+\sqrt{6}>\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow 7+2\sqrt{6}>5+2\sqrt{6}$.

1.220B Valorile parametrului real m pentru care $\{x\in\mathbf{R}|(m-1)e^x+2m+me^{-x}>0\}=R$ sunt $m\ge 1$, $m\in[1,\infty)$: $m(e^x+2+e^{-x})>e^x$, $m>\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$, $0<\frac{e^x}{e^x+1}<1$, $\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$ este 1 la $+\infty$ şi minimă 0 la $-\infty$, deci $m>1$.

1.221B Fie k numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $3^{x+3}+9=\sqrt{81^{2x-1}}+3^{4x}$. Atunci $k=1$. Notând $3^x=t$ obţinem $27t+9=\frac{10}{9}t^4$ dreapta $27t+9=u$ taie în două puncte curba $u=\frac{10}{9}t^4$ unul cu $t<0$ şi unul cu $t>0$ deci ecuaţia are o singură soluţie reală.

1.222B Fie $M=\{x\in(0,\infty)|3^{\log_6 x}+4^{\log_6 x}+5^{\log_6 x}=x$. Atunci $M\in(200,300)$. Notăm $\log_6 x=t$, $x=6^t$ şi obţinem ecuaţia $3^t+4^t+5^t=6^t$ cu soluţia cunoscută $t=3$, deci $x=6^3$ (vezi 1.208A).

1.223B Pentru sistemul $x^{y^2-3y+3}=x$, $x+2y=5$ notăm A familia perechilor

$(x,y) \in \mathbf{R}^2$ care verifică sistemul şi $S = \sum_{(x,y)\in A} (x^2+y^2)$. Atunci $S = \frac{125}{4}$: $x=0$, $y=\frac{5}{2}$, $x=1$, $y=2$ şi $x=-1$, $y=3$ constituie evident soluţii. Fie $x \neq 1$, $x>0 \Rightarrow y^2-3y+3=1$, $y_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2}$, $y_1=2$, $y_2=1$ deci perechile soluţii sunt $(0,\frac{5}{2})$, (1,2), (-1,3), (3,1), $S = \frac{125}{4}$.

1.224B Să se calculeze Imf unde $f(x) = \frac{4^x-6^x-9^x}{4^x+6^x+9^x}$; $f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}$, notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $u = g(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$; Im$f$ este proiecţia graficului funcţiei $u=g(t)$ în planul (t,u) pe axa Ou luat pentru $t>0$. Rezultă uşor Imf $= \left[\frac{1}{3},1\right)$. Algebric, punem condiţia ca ecuaţia $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} = u$ să aibă rădăcini $t_1,t_2 \in \mathbf{R}_+^*$ şi $t>0$.

1.225B Fie $a>0$ şi $M = \{x \in \mathbf{R} | a^{\sqrt{x}} \geq a^{2-x}\}$. Să se decidă: a) $(\exists)a > 0 \Rightarrow M = \emptyset$; b) M este nemărginită $(\forall)a>0$; c) $(\exists)a>0 \Rightarrow M$ nu este un interval; d) $2 \in M$, $(\forall)a>0$; e) M este interval închis $(\forall)a>0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false. Inegalitatea se scrie $a^{x+\sqrt{x}-2} \geq 1$ şi rezultă 1° pentru $0<a<1 \Rightarrow x+\sqrt{x}-2 \leq 2$, $0<x<1$; 2° $1 \leq a \Rightarrow x+\sqrt{x}-2 > 0 \Rightarrow 1<x$. Din cele arătate rezultă că a) - e) sunt false.

1.226B Fie S suma soluţiilor ecuaţiei $(3x-1)^{x^2} = (3x-1)^{2x+3}$. Atunci $S=3$. Dacă $3x-1=1$ ecuaţia se verifică deci $x_0 = \frac{2}{3}$ este soluţie; $x \neq \frac{2}{3} \to x^2 = 2x+3$ deci $x_1=-1$, $x_2=3$; dar $3x-1=0$, $x=\frac{1}{3}$ verifică deci $S=3$.

1.227B Suma S a soluţiilor ecuaţiei $6^x+8^x+15^x = 9^x+12^x+10^x$ este $2^x \cdot 3^x + (2^x)^3 + 3^x \cdot 5^x = (3^x)^2 + (2^x)^2 \cdot 3^x + 2^x \cdot 5^x$, $2^x[3^x+(2^x)^2-5^x] = 3^x[3^x+(2^x)^2-5^x] \Rightarrow (3^x-2^x)(3^x+2^{2x}-5^x) = 0$, $x_1=0$, $x_2=2$.

1.228B Fie $M = \{x \in \mathbf{Z} | 2x+1 < 3\log_3(x+5)\}$ şi $m \in \mathbf{N}$ numărul elementelor lui M. Avem $m=7$. Comparăm ordonatele corespunzătoare absciselor numere întregi ale dreptei $y=2x+1$ şi logaritmului $y=\log_3(x+5)^3$, $(x>-5)$ şi observăm că dreapta este sub logaritm pentru $x=-4,-3,-2,-1,0,1,2$ deci $m=7$.

1.229B Suma S a inverselor soluţiilor ecuaţiei

$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0$$

este $S \in (38,39)$. Notăm $\log_x 6 = t$ şi obţinem $t^2+\frac{1}{t^2}+2\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{3}{4}=0$, $t+\frac{1}{t}=u \Rightarrow u^2-2+2u+\frac{3}{4}=0$, $u^2+2u-\frac{5}{4}=0$, $u_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+5}}{2} = -\frac{2\pm3}{2}$, $t+\frac{1}{t} = -\frac{5}{2} \Rightarrow t_1=-2, t_2=-\frac{1}{2}$, $\log_x 6 = -2$, $x^{-2}=6$, $\frac{1}{x_1} = \sqrt{6}$, $\log_x 6 = -\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}}=6$, $\frac{1}{x_2}=36$, $x_1+x_2 = S \in (38,39)$.

1.230B Soluţia inecuaţiei $2(\sqrt{3}+1)^{-x} + 2^x(2+\sqrt{3})^x > 3$ este $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. $(\sqrt{3}+1)^2 = 2(2+\sqrt{3})$, $2(\sqrt{3}+1)^{-x} + (\sqrt{3}+1)^{2x} > 3$, $(\sqrt{3}+1)^x = t > 0 \Rightarrow$

$\frac{2}{t}+t^2>3$, $t^3-3t+2>0$ $(t-1)^2(t+2)>0$ deci $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

1.231B Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{3}{4}\right)^{10-6x-x^3} < \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Avem $10-6x-x^3>3$, $x^3+6x-7<0$, $(x-1)(x^2+x+7)<0$, $x<1$.

1.232B Fie funcţiile $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $h = g\circ f$. Atunci f,g sunt descrescătoare iar h crescătoare. Logaritmul şi exponenţiala în baze subunitare sunt descrescătoare iar compunerea a două funcţii descrescătoare este crescătoare, verificarea se face uşor.

1.233B Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $2^{2x}-3\cdot 2^x+a=0$ are două soluţii reale distincte. Deoarece $(2^x)_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2}$ condiţiile sunt $9-4a>0$ deci $a<\frac{9}{4}$ şi $a>0$ pentru ca $3-\sqrt{9-4a}>0$ $(2^x>0)$. Rezultă $0<a<\frac{9}{4}$.

1.234B Inecuaţia $\log_4 x + \log_x 4 < \frac{5}{2}$ $(x>0, x\neq 1)$ are soluţia $x \in (0,1)\cup(2,16)$. Cu $\log_4 x = t$ avem $t+\frac{1}{t} < \frac{5}{2}$, $\frac{2t^2-5t+2}{t} < 0$, $t_1=2$, $t_2=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow t \in (-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$ şi $x \in (0,1)\cup(2,16)$.

1.235B Soluţia inecuaţiei $\log_x(3x) \leq 2$ este $x \in (0,1)\cup(3,\infty)$. Pentru $x\in(0,1)$, $\log_x 3x \leq \log_x x^2 \Rightarrow 3x > x^2$, $x\in(0,3)$ deci $x\in(0,1)$ iar pentru $1<x$, $3x<x^2 \Rightarrow x>3$; soluţia este $(0,1)\cup(3,\infty)$.

1.236B Ecuaţia $4^x-(m+1)2^x+m=0$ are exact o soluţie reală dacă pentru ecuaţia $t^2-(m+1)t+m=0$, $t=2^x$, $t>0$, $\Delta=0$ sau $\Delta>0$ şi $P=t_1t_2<0$ (deci t_1,t_2 au semne contrare) şi cum $t=2^x>0$ una singură este reală. Rezultă $\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geq 0$, $\Delta=0$ dacă $m=1$; $t_1t_2=m<0$ deci avem o singură soluţie dacă $m\in(-\infty,0]\cup\{1\}$.

1.237B Soluţia ecuaţiei $9\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^x = 810$ este $x=2$: $(3^x)^2+3^x-90=0$, $(3^x)_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2} = \frac{-1\pm19}{2}$, $3^x=9$, $x=2$.

1.238B Mulţimea $A = \left\{x\in\mathbf{R} | \log_9^2 x \geq \log_3^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}\right\}$ unde $x\in(0,4)$ este $A = \left(0,\frac{4}{5}\right)$; $\log_3^2\sqrt{1-\frac{x}{4}} = \log_9^2\left(1-\frac{x}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{\log_9\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x}\right)^2 \leq 1$ sau $-1 \leq \frac{\log_9\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x} \leq 1$, $0 \leq \frac{\log_9 x\left(1-\frac{x}{4}\right)}{\log_9 x}$, $\frac{\log_9\frac{4-x}{4x}}{\log_9 x} \leq 0$. Făcând semnul celor trei logaritmi şi tabloul global al semnelor rezultă $A = \left(0,\frac{4}{5}\right)$.

1.239B Imaginea Imf unde $f(x) = \frac{3^x-4}{3^x+2}$ este intervalul $(-2,1)$. Construim graficul funcţiei $y=\frac{3^x-4}{3^x+2}$ sau al funcţiei $u=\frac{t-4}{t+2}$ pentru $t>0$ în planul (t,u) sau rezolvăm în raport cu t ecuaţia $u=\frac{t-4}{t+2}$, $t=\frac{4+2u}{1-u}$ şi punem condiţia $t>0$ deci $-2<u<1$ sau încă: $u=1+\frac{-6}{t+2}$ şi succesiv avem $0<t<\infty$, $2<t+2<\infty$, $0<\frac{1}{t+2}<\frac{1}{2}$, $-3<\frac{-6}{t+2}<0$, $-2=-3+1<1-\frac{6}{t+2}<1$.

1.240B Soluţia inecuaţiei $2^{\sqrt{4-x}} < 4^{\frac{x}{2}}$ este $A = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2},4\right]$; $2^{\sqrt{4-x}} < 2^x$,

$x \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-x} < x$, $x^2+x-4>0$, $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

1.241B Valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $2^{3x-1}+2^{3(2-x)}-33<0$; notăm $2^{3x-1}=t$, $t^2-33t+32<0$, $(t-1)(t-32)<0$, $t\in(1,32)$, $x\in(\frac{1}{3},2)$.

1.242B Soluţia ecuaţiei $3^{x+1}+5\cdot 3^{x-1}-7\cdot 3^x+21=0$ este $x=2$, $-7\cdot 3^x+7\cdot 9=0$, $3^x=9$, $x=2$.

1.243C Dacă $x\in(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ şi $a=\log_2 x$, $b=\log_{2x}2$, atunci $(1+a)b=1$, $b=\log_{2x}2=\frac{1}{\log_2 2x}=\frac{1}{1+\log_2 x}=\frac{1}{1+a}\Rightarrow(1+a)b=1$.

1.244C Dacă $E=\log_x(x-1)+\log_{x-1}x+2$, calculaţi $E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Dacă $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, deci $\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)=\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=-1$. Analog $\log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-1$, deci $E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$.

1.245C Soluţia ecuaţiei $2^{\sqrt{x-2}}+3^{\sqrt{x^2-2}}+4^{\sqrt{x^2-x-2}}=3$ este $x=2$ deoarece $x=2$ verifică ecuaţia şi funcţia definită de membrul stâng este ≥ 3.

1.246C Valorile lui m pentru care ecuaţia $(m-2)4^x+(2m-3)2^{x+1}+5m-6=0$ are o singură soluţie reală sunt $m\in\left(\frac{6}{5},2\right)$. Vezi şi 1.236B. Pentru ecuaţia $(m-2)t^2+(2m-3)2\cdot t+5m-6=0$ punem condiţiile $\Delta=0$ şi $P=t_1\cdot t_2=\frac{5m-6}{m-2}<0$. Rezultă $m\in\left(\frac{6}{5},2\right)$.

1.247C Dacă $0<a<b<1$ şi $E=\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}$, atunci $E>2$. Deoarece $a<b<1\Rightarrow\log_b a>\log_b b=1$ deci şi $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}>0$; $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}\Rightarrow\log_a\frac{2ab}{a+b}>\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)$, $\log_b\frac{2ab}{a+b}>\frac{1}{2}(\log_b a+\log_b b)$ şi adunând avem $\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}>1+\frac{1}{2}\left(\log_b a+\frac{1}{\log_a b}\right)>2$.

1.248C Inecuaţia $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$ este verificată pentru $x>2$. Domeniul de definiţie: $\frac{3-2x}{1-x}\ge 1$, $\frac{2-x}{1-x}\ge 0$, $x\in(-\infty,1)\cup[2,\infty)$ iar $\log_2\frac{3-2x}{1-x}<1=\log_2 2\Rightarrow\frac{3-2x}{1-x}<2$, $\frac{1}{1-x}<0$, $x>1$. Intersecţia este $x\ge 2$.

1.249C Numărul de soluţii ale sistemului $\begin{cases}3^x+4^y=13\\ \log_3 x-\log_4 y=1\end{cases}$. Putem scrie $y=\log_4(13-3^x)$, $y=\frac{1}{4}x^{\log_3 4}$ şi intersectăm cele două grafice: rezultă un singur punct de intersecţie o singură soluţie, prima funcţie descreşte de la $\log_4 12$ în $x=0$ la 0 în punctul $x=\log_3 12$, iar a doua funcţie creşte de la 0 la ∞ (putere supraunitară). Altfel, $x=3^{\log_4(4y)}\Rightarrow 3^{3\log_4(4y)+4^y}=13$ are soluţie unică.

1.250C Fie $A=\{x\in\mathbf{Z}|3x+1<2\log_2(x+4)\}$ şi S suma elementelor sale. Atunci $S=1$. Procedăm ca în 1.228B intersectăm dreapta $y=3x+1$ cu logaritmul $y=\log_2(x+4)^2$ şi obţinem $x=-3,-2,-1.0,1$ deci $S=-5$.

1.251C Fie $S=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_2 k}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_3 k}+\ldots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\log_n k}$; atunci $S=1$. $S=\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\ldots+\frac{1}{\log_n n!}=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\ldots+\log_{n!}n=\log_{n!}n!=1$.

1.252C Câte soluţii are sistemul $x^{2x+y}=y^\alpha$, $y^{2x+y}=x^{-\alpha}$? Avem $y=x^{\frac{2x+y}{\alpha}}$, $y=x^{\frac{-\alpha}{2x+y}}\Rightarrow\frac{2x+y}{\alpha}=\frac{-\alpha}{2x+y}$ (dacă $x\ne 1$) deci $(2x+y)^2+\alpha^2=0$; rezultă că are numai soluţia $x=y=1$.

1.253C Inegalitatea $3^x+4^x+5^x>6^x$ este verificată pentru $x<3$ (vezi 1.208A).

1.254C Ecuaţia $\sqrt{\log_\alpha\alpha x+\log_x\alpha x}+\sqrt{\log_\alpha\frac{x}{\alpha}+\log_x\frac{\alpha}{x}}=2\sqrt{\alpha}$, $\alpha>0$, $\alpha\ne 1$ are soluţiile $x=\alpha^\alpha$, $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$. Ecuaţia se scrie

$$\sqrt{2+\log_\alpha x+\log_x\alpha}+\sqrt{-2+\log_\alpha x+\log_x\alpha}=2\sqrt{\alpha}$$

şi rezultă $\log_\alpha x>0$ deci $x>1$ pentru $\alpha>1$ şi $x<1$ pentru $\alpha<1$. Notăm $\log_\alpha x=t$, $\sqrt{2+t+\frac{1}{t}}+\sqrt{-2+t+\frac{1}{t}}=2\sqrt{\alpha}$, $\left|\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right|+\left|\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right|=2\sqrt{\alpha}\Rightarrow$ pentru $\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}>0$ deci $t>1$, $2\sqrt{t}=2\sqrt{\alpha}$, $t=\alpha$, $\log_\alpha x=\alpha$, $x=\alpha^\alpha$; pentru $\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}<0$ deci $t<1$, $\frac{2}{\sqrt{t}}=2\sqrt{\alpha}$, $t=\frac{1}{\alpha}$, $\log_\alpha x=\frac{1}{\alpha}$, $x=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$; pentru $\alpha<1$ evident nu are soluţie, deoarece membrul stâng >2.

1.255C Inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ are soluţia $(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},3)$. Domeniul de definiţie este $(-3,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$ (din $x^2-3>0$, $x+3>0$) iar din $x^2-3<x+3$ rezultă $(-2,3)$ deci soluţia este $(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},3)$.

1.256C Să se rezolve inecuaţia $\log_{2^x}(2^{2x}+|x|)>2$. $\log_{2^x}(2^{2x}+|x|)>\log_{2^x}(2^x)^2$ deci pentru $2^x<1$ $(x<0)\Rightarrow 2^{2x}+|x|<2^{2x}$, $|x|<0$, $x\in\emptyset$; pentru $2^x>1$ $(x>0)\Rightarrow 2^{2x}+|x|>2^{2x}$, $|x|>0$ deci $x\in(0,\infty)$.

1.3 Numere complexe. Combinatorică. Polinoame

1.257A $i+i^3+i^5+\ldots+i^{99}=i-i+i-i+i-i+\ldots+i-i=0$ $(i^{99}=i^{4\cdot 24+3}=i^3=-i)$. Altfel $i(1+i^2+i^4+\ldots+(i^2)^{49})=i\cdot\frac{1-(i^2)^{50}}{1-i^2}$.

1.258A $|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}|=1$ $(y>2)\Leftrightarrow x^2+1+y-2=1\Rightarrow y=2-x^2$.

1.259A Fie $\varepsilon=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ şi $S=(2\varepsilon+\varepsilon^2)(2\varepsilon^2+\varepsilon)$, atunci $S=3$. Avem $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Rightarrow S=(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)=\varepsilon^3+1-\varepsilon-\varepsilon^2=3$.

1.260A Dacă $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, atunci $|z|^4=1:z=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{4}=\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})+2i\sqrt{4-3}}{4}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$.

1.261A Dacă z verifică ecuaţia $|z|+z=8+4i$ atunci $|z|=5$, $\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=8+4i$, $y=4$, $\sqrt{x^2+y^2}+x=8$, $16x=48$, $x=3$, $|z|=5$.

1.262A Fie $z=(x+iy)^n+(x-iy)^n$ unde $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ şi $n\in\mathbf{N}$. Cât este n pentru ca z să fie real? $z=[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n+[\rho(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\rho^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\rho^n\cos n\theta$, deci orice $n\in\mathbf{N}$ verifică. Altfel, se dezvoltă cu binomul lui Newton, $z=A+iB$ unde $B=0$. Mai observăm că $w=u+iv$, $\bar{w}^n=\overline{w^n}$, $w^n+\bar{w}^n=w^n+\overline{w^n}\in R$.

1.263A Dacă $S_n=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\ldots+n(2n+1)$, atunci $S_n=\frac{1}{6}(4n^3+9n^2+5n)$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$.

1.264A Prin inducţie se arată că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$. Pentru $n=1$ este adevărată. $P_n\to P_{n+1}$: deci ar trebui ca $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$; dar $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ şi rămâne să arătăm că $2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$, deci $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

1.165A Inegalitatea $2^n>n^2$ se verifică prin inducţie pentru $n>5$.

1.266A $S=\frac{C_1^0}{C_1^1}+\frac{C_2^1}{C_2^2}+\frac{C_3^2}{C_3^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{C_n^n}$ are valoarea $S=C_{n+1}^{n-1}$. $C_k^k=1$, $C_k^{k-1}=C_k^1=k$ deci $S=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^{n-1}$.

1.267A Egalitatea $\sum_{k=1}^{n}k(ak+b)=2C_{n+1}^3$ verificată pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ are loc pentru $a=b=1$. $a\sum_{k=1}^{n}k^2+b\sum_{k=1}^{n}k=a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}[a(2n+1)+3b]=\frac{2(n+2)(n+1)n}{6}$ $(\forall)n$, $2a=2$, $a+3b=4$.

1.268A Valorile lui $a,b\in\mathbf{R}$ astfel ca ecuaţiile $x^4+4x^3+4x^2+a=0$, $x^3+x^2-x+b=0$ să aibă o rădăcină dublă comună sunt $a=b=-1$. Pentru ecuaţia a doua x_1 rădăcina dublă anulează şi derivata deci $3x^2+2x-1=0$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{3}$, $x_1=-1\Rightarrow b=-1=a$, $x_2=\frac{1}{3}$ nu verifică. Altfel identificând coeficienţii: $(x-\alpha)^2(x-\beta)\equiv x^3-x^2-x+b\Rightarrow 2\alpha+\beta=-1$, $\alpha^2+2\alpha\beta=-1$ deci $3\alpha^2+2\alpha-1=0$, $\alpha=-1$ etc.

1.269A Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^4+3x^3+mx^2+3x+1$ să fie toate reale. Separăm pe m, $m=-\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2}$, facem graficul funcţiei $f(x)=\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2}$ îl intersectăm cu $y=-m$ şi luăm valorile lui m pentru care se intersectează în patru puncte. Algebric, rezolvăm ecuaţia

reciprocă cu schimbarea $t=x+\frac{1}{x}$. $t^2+3t+m-2=0$, $t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17-4m}}{2}$, $m\le\frac{17}{4}$, $x+\frac{1}{x}=t_{1,2}$, $\Delta=t_{1,2}^2-4\ge0$, $t_{1,2}\le-2$, $2\le t_{1,2}$, $m\le-8$.

1.270A $S=P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)$ unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3+3x+1=0$ iar $P(x)=x^4+2x^3-x^2+3x-2$, are valoarea $S=12$. $S_1=x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$. $S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-6$, $S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3(x_1+x_2+x_3)-3=-3$, $S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4=-3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)=-3\cdot(-6)=18$ deci $S=S_4+2S_3-S_2+3S_1-6=18-6+6-6=12$.

1.271A Restul împărţirii polinomului f la x^3-2 este egal cu pătratul câtului. Să se afle câtul dacă $f(-2)+f(2)+34=0$: avem $f=(x^3-2)(ax+b)+(ax+b)^2$ şi utilizând relaţia obţinem $4a^2+16a+b^2-2b+17=0$, $4(a+2)^2+(b-1)^2=0$ deci $a=-2$, $b=1$.

1.272A Pentru care $m\in\mathbf{R}$, ecuaţia $x^4+mx^3-3x^2-4x+4=0$ are două soluţii duble: $(x-a)^2(x-b)^2=0$ $(x^2-(a+b)\lambda+ab)^2=0$, $a+b=s$, $ab=p$, $(x^2-sx+p)^2=0$, $x^4+s^2x^2+p^2-2sx^3+2px^2-2psx=0$, $p^2=4$, $p=\pm2$, $s^2+2p=-3$, $-2s=m$, $-2ps=-4$ deci $p=-2$, $s=-1$, $m=2$. Altfel, cu Viétte: $x_1+x_2+x_3+x_4=-m$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=-3$, $(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=4$, $x_1x_2x_3x_4=4\Rightarrow x_1+x_3=-\frac{m}{2}$, $4x_1x_3+x_1^2+x_3^2=-3$, $x_1x_3(x_1+x_3)=2$, $(x_1x_3)^2=4$, $x_1=1$, $x_2=-2$, $f=(x^2+x-2)^2$.

1.273A Cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f=(x^2+2x+3)^2-5(x^2+2x+3)+6$, $g=x^3+4x^2+3x$ este $h=x(x+1)$ deoarece $x=0$ şi $x=-1$ sunt rădăcini comune lui f şi g dar $x=-3$ nu este rădăcină pentru f dar este pentru g.

1.274A Să se determine perechea (a,m) de numere reale astfel ca polinomul $f=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ să se dividă prin polinomul $g=x^2-x+m$. Împărţim f la g şi obţinem restul $(a-5m+2)x+(2-am+6m^2+m)\equiv0\Rightarrow a-5m+2=0$, $2-am+6m^2+m=0$ deci perechile $(-7,-1)$ şi $(-12,-2)$ (ecuaţia care îl dă pe m este $m^2+3m+2=0$).

1.275A Valoarea lui n din egalitatea $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{15}{8}$ este $n=15$: $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\ldots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}=\frac{15}{8}\Rightarrow n=15$.

1.276A Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ este $n=17$. $T_{k+1}=C_{100}^k2^{\frac{100-k}{2}}\cdot3^{\frac{k}{3}}\Rightarrow k=3p$, $\frac{100-3p}{2}=50-3\frac{p}{2}$ deci $p=2m$, $k=6m$, $m=0,1,\ldots,16$, $n=17$.

1.277A Să se calculeze sumele $S_1=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots$, $S_2=C_n^1+C_n^3+$

$C_n^5 + \ldots : 2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$, $0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$; $S_1 = \frac{2^n+0}{2} = 2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$; $S_2 = \frac{2^n-0}{2} = 2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

1.278A $S = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]k! =$

$-\sum_{k=1}^{n}[k! - (k+1)!] = -[1! - 2! + 2! - 3! - n! + n! - (n+1)!] = (n+1)! - 1.$

1.279A $\mathrm{Im}\frac{1-i}{1+i} = \mathrm{Im}\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \mathrm{Im}\frac{-2i}{2} = \mathrm{Im}(-i) = -1$ ($\mathrm{Im}(x+iy) = y$).

1.280A $E = (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$.

1.281A Dacă $iz \in \mathbf{R}$ şi $|z| = 2 \Rightarrow z = i(x+iy) = -y+ix \in \mathbf{R}$, $|z| = |y| = 2$, $\Rightarrow x = 0$ deci $z \in \{\pm 2i\}$.

1.282A Dacă $z \neq 1$ şi $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$, atunci $|z'| = \frac{|x-1+iy|}{|(-x+1)+iy|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 1$.

1.283A Numerele complexe $z_1 = 2+2i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 1-i$ sunt vârfurile unui romb deoarece diagonalele sunt perpendiculare şi se înjumătăţesc.

1.284A $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$, $y = -\frac{5}{11}$. Se obţine sistemul $x+3y = 1$, $2x-5y = -3 \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$, $y = -\frac{5}{11}$.

1.285A Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ atunci $\left|\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\right| = \frac{|\alpha+i|}{|\alpha-i|} = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\sqrt{\alpha^2+1}} = 1$.

1.286A Termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}})^{30}$ este T_{11} : $T_{k+1} = C_{30}^k (ax^{-\frac{1}{2}})^{30-k}(xa^{-\frac{1}{2}})^k = C_{30}^k x^{\frac{3k-30}{2}} a^{30-\frac{3k}{2}}$, $3k-30 = 0$, $k = 10$.

1.287A Soluţiile inecuaţiei $C_{2x}^2 < 15$ sunt $x \in \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$: $2x \geq 2$, $x \geq 1$, $2x = 2, 3, 4, 5, \ldots$ dar $\frac{2x(2x-1)}{2} < 15$, deci $x = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$.

1.288A Valoarea expresiei $E = \frac{A_n^2}{A_n^1 - A_n^3} = \frac{n(n-1)}{n-n(n-1)(n-2)} = \frac{n-1}{-n^2+3n-1}$.

1.289A Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ are valoarea 11 : $x = \frac{6\cdot 5}{2} + 5\cdot 4 - 4! = 11$.

1.290A Termenul care conţine pe x şi y la puteri egale în dezvoltarea $\left(x\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2000}$ este T_{1001} : $T_{k+1} = C_{2000}^k x^{2000-\frac{3k}{2}} y^{\frac{2000-k}{2}} \Rightarrow 2000 - \frac{3k}{2} = \frac{2000-k}{2}$, $k = 1000$.

1.291A Dacă $x \in \mathbf{N}^*$ divide pe $n(n+1)$ atunci x este număr par deoarece produsul a două numere naturale consecutive este număr par.

1.292A Dacă n este numărul soluţiilor ecuaţiei $2C_x^2 + 6C_x^3 = 9x$, $n = 1$: $x \geq 3$, $2\frac{x(x-1)}{2!} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = 9x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, deci $x = 4$, $n = 1$.

1.293A Suma coeficienţilor polinomului $P(x) = (8x^3-7)^{10}$ este $1/1 = P(1)$.

1.294A Numărul $C_{5n+4}^{n^2+3n-4}$ este definit pentru $n = 1, 2, 3, 4$; $5n+4 \geq n^2+3n-4 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 \leq 0$, $0 \leq n \leq 4$, dar $n \neq 0$.

1.295A Numerele naturale n pentru care dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ conţine termeni independenţi de x sunt de forma $n = 5p$: $T_{k+1} = C_n^k x^{2n-\frac{5k}{2}}$, $n = \frac{5k}{4}$, $k = 4p$, deci $n = 5p$, $p \in \mathbf{N}^*$.

1.296A $S_n = 1+3+5+\ldots+2n-1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$.

1.297A Dacă $\underbrace{111\ldots11}_{n\ cifre}{}^2 = 12345678987654321$, atunci $n = 9$. Ridicând la puterea a doua, pentru a obţine cifra maximă 9 este nevoie de nouă linii de câte nouă cifre de 1, deci $n = 9$.

1.298A $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

1.299A Suma pătratelor modulelor rădăcinilor polinomului $f = x^3 + (3i-2)x^2 - (1+4i)x + 2 + i$ ştiind că are o rădăcină reală. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ rădăcină, $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 + i(3x_0^2 - 4x_0 + 1) = 0 + i0$ deci $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0$, $3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$ rezultă $x_0 = 1$. Împărţim pe f la $x-1$ sau descompunem în factori: $x^3 - x^2 - (x^2-1) + 3i(x^2-x) - ix + i - x + 1 = 0$, $(x-1)[x^2 + x(3i-1) - (2+i)] = 0$, $x_0 = 1$, $x_{1,2} = \frac{1-3i+\sqrt{-2i}}{2}$, $u_{1,2} = \sqrt{-i} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$, $k = 0, 1 \Rightarrow u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -i$, $x_3 = 1-2i$, $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1+1+5 = 7$.

1.300A Valoarea expresiei $E = \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$ este $E = -6$. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. $E = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} = \frac{6-x_3}{x_3} = 6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3 = 6\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} - 3$.

1.301A Toate polinoamele neidentic nule cu coeficienţi reali care verifică relaţia $P(x^3) = x^4P(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ sunt de gradul doi. Avem condiţia $3n = n+4$, deci $n = 2$.

1.302A Suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$ este $S = 1$. Ecuaţia $t^2 - (1-i)t - 1 = 0$ ($t = z^3$) are soluţiile $t_1 = 1$, $t_2 = -i$ deci obţinem ecuaţiile $z^3 - 1 = 0$, $z^3 + i = 0$ cu soluţiile reale $z_1 = 1$ (de la prima) şi nici o rădăcină reală de la a doua, $z_k = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$, deci $S = 1$ (dacă ar fi $S = 0$ ar trebui ca $x_1 = -1$ să fie rădăcină pentru $z^3 + i = 0$).

1.303A Fie $E = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Determinaţi E şi parametrii reali a şi b astfel încât E să fie o soluţie a ecuaţiei $x^3 + ax + b = 0$. $E = 2$ se verifică (observăm şi că $10 - 6\sqrt{3} = \frac{-8}{10+6\sqrt{3}}$) iar a şi b se determină uşor

din formula Cardan sau $E^3 = 10 + 6\sqrt{3} + 10 - 6\sqrt{3} + \sqrt[3]{-8} \cdot 3 \cdot E$.

1.304A Dacă $x_1 = 1+i$ este rădăcină a polinomului $x^4+3x^3+2x^2+mx+n$ cu $m, n \in \mathbf{R}$, atunci $m = -10$, $n = 20$. Înlocuim $1+i$ în polinom, $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = -2+2i$, $(1+i)^4 = -4 \Rightarrow m+n = 10$, $m+10 = 0$, $m = -10$, $n = 20$. Altfel, împărţim polinomul la $x^2 - 2x + 2$ şi $r(x) = 0$.

1.305B Fie $M = \{x \in \mathbf{R} | (\sqrt{3}+1)^x + (\sqrt{3}-1)^x \leq 4(\sqrt{2})^x\}$. Ecuaţia se scrie $(\sqrt{3}+1)^x + \frac{2^x}{(\sqrt{3}+1)^x} \leq 4(\sqrt{2})^x$, $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^x \leq 4$, $t + \frac{1}{t} \leq 4$, $t > 0$, $t^2 - 4t + 1 \leq 0$, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3} \leq t < 2 + \sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^{-1} \leq \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x \leq 2 + \sqrt{3}$. Dar $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ deci $(2+\sqrt{3})^{-1} \leq (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x \leq 2+\sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^{-2} \leq (2+\sqrt{3})^x \leq (2+\sqrt{3})^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

1.306B Fie ecuaţia $x^3 + 3x^2 + cx + d = 0$ cu proprietatea că x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică iar $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$ în progresie geometrică. Se cer numărul k al perechilor $(c, d) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Avem $x_1 + x_2 + x_3 = -3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c$, $x_1x_2x_3 = -d$, $2x_2 = x_1 + x_3$, $3x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = -3$, $x_2 = -1$, $(x_2+1)^2 = (x_1+1)(x_3+1)$ de unde $(x_1+1)(x_3+1) = 0$ deci $x_1 = -1$ sau $x_3 = -1$, luăm $x_1 = -1$, $x_3 = -d$, $-2x_3 = c-1$, $2d - c = -1$, $-c + d = -2$, $c = 3$, $d = 1$, $k = 1$.

1.307B Se cere $\lambda = q(1)$ unde $q(x)$ este câtul împărţirii lui $f = ax^{n+2} + bx^n + 2$ la $(x-1)^2$, dacă $(x-1)^2$ divide pe f. Condiţia se scrie $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ deci $a + b + 2 = 0$, $(n+2)a + b_n = 0$, $2a = 2n$, $a = n$, $b = -n-2$. Apoi $f''(1) = 2q(1) = 2n(n+2)$. Se poate aplica schema lui Horner şi se obţine $\lambda = n(n+2)$.

	n	n	-2	-2	$\ldots$	-2	-2
1	n	$2n$	$2n-2$	$2n-4$	$\ldots$	$2n-2(n-1)$	$2n-2n$

Dăm şi o variantă prin calcul direct: $f = nx^{n+2} - (n+2)x^n + 2 = (x-1)^2 q(x) = nx^n(x^2-1) - 2(x^n-1) = (x-1)[nx^n(x+1) - 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1] = (x-1)[nx^{n+1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1) + nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)] = (x-1)\{(x^{n+1} - x^{n-1}) + (x^{n+1} - x^{n-2}) + (x^{n+1} - x^{n-3}) + \ldots + (x^{n+1} - x^2) + (x^{n+1} - x) + (x^{n+1} - 1)] + [(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + (x^n - x^{n-3}) + \ldots + (x^n - x^2) + (x^n - x) + (x^n - 1]\} = (x-1)^2\{[x^{n-1}(x+1) + x^{n-2}(x^2+x+1) + x^{n-3}(x^3+x^2+x+1) + \ldots + x^2(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1) + x(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1) + (x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1)] + [x^{n-1} + x^{n-2}(x+1) + x^{n-3}(x^2+x+1) \ldots x^2(x^{n-3} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) + x(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) + (x^{n-1} + \ldots x + 1)]\}$. Rezultă că $q(1) = [2+3+4+\ldots+n+(n-1)] + [1+2+3+\ldots+n] = n(n+1) + n = n(n+2)$.

1.308B Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}_1$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = |z_2| = 1$ şi $w = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|$ atunci

$w = 1$.

$$w = \left|\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 - \cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{1 - (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + i2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{1 - \cos(\theta_1-\theta_2) - i\sin(\theta_1-\theta_2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - i2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right| = |\cos\theta_2 + i\sin\theta_2| = 1$$

1.309B Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = C_{3x+7}^{6x+2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie şi $M = \max f(x)$. Atunci $M = 84$ Condiţiile sunt $3x+7 \geq 6x+2 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$, $3x+7 \geq 0$, $x \geq -\frac{7}{3}$, $6x+2 \geq 0$, $x > -\frac{1}{3}$ deci $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$: $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow C_6^0 = 1$, $x = 0 \Rightarrow C_7^2 = 21$, $x = \frac{1}{3} \Rightarrow C_8^4 = 70$, $x = \frac{2}{3} \Rightarrow C_9^0 = 84$, $x = \frac{3}{5} \Rightarrow C_{10}^8 = 45$, $x = \frac{4}{3} \Rightarrow C_{11}^{10} = 11$, $x = \frac{5}{3} \Rightarrow C_{12}^{12} = 1$, deci $M = 84$.

1.310B Valoarea sumei $S = C_{16}^0 - C_{16}^2 + C_{16}^2 - C_{16}^6 + \ldots - C_{16}^{14} + C_{16}^{16}$. $(1+i)^n - \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \ldots \Rightarrow C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_b^8 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ de unde $S = 2^8\cos 4\pi = 2^8 = 256$.

1.311B Valoarea lui λ din relaţia $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda ab$ unde $x = a+b$, $y = a\varepsilon + b\varepsilon^2$, $z = a\varepsilon^2 + b\varepsilon$, $a, b \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este $\lambda = x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 + (a\varepsilon^2 + b\varepsilon)^2 = a^2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4) + b^2(1+\varepsilon^4+\varepsilon^2) + 2ab(1+\varepsilon^3+\varepsilon^3) = \lambda ab \Rightarrow \lambda = 6$ deoarece $\varepsilon^3 = 1$, $1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

1.312B Dacă $a_n = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $M = \left\{n \in \mathbf{N}^*, a_n < \frac{28}{15}\right\}$ şi p numărul elementelor lui M, atunci $p = 7$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{(4k^2-1)+1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left[n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(n + \frac{n}{2n+1}\right) = \frac{n^2+n}{2n+1} \leq \frac{56}{15}$ deci $n \leq 7$, $p = 7$.

1.313B Valoarea lui a pentru care $f = (x+1)^{302} + x + a$ se divide la $g = x^2 + 3x + 3$ este $a = 2$. g divide pe f dacă rădăcinile lui g sunt şi ale lui f. $x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Luăm $x_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $x_1 + 1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $(x_1+1)^{302} = \cos\frac{302\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{302\cdot 2\pi}{3} = \cos\frac{3\cdot 100+2}{3}2\pi + i\sin\frac{3\cdot 100+2}{3}2\pi = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} + a = -2 + a = 0$ deci $a = 2$.

1.314B Suma $S = x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$ unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluţiile ecuaţiei $x^4 - 2x^3 + 3x + 2 = 0$, este $S = -16$. Avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$, $S_k = x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Avem $x_i^3 - 2x_i^2 + 3 + \frac{2}{x_i} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $S_{-1} = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$. $S_3 - 2S_2 + 12 + 2S_{-1} = 0 \Rightarrow S_3 = -1$, $S_4 - 2S_3 + 3S_1 + 8 = 0 \Rightarrow S_4 = -16$.

1.315B Dacă M este mulţimea acelor a pentru care polinomul $Q = x^2+x+1$ divide pe $P = x^{2n+1} - x^n + ax^{n-1} + x + 1$ şi $\lambda = \sum_{a\in M} a$, se cere λ. Notăm $x_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_0^3 = 1$, $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, $P(x_0) = 0$?: $P(x_0) = \cos\frac{2\pi(2n+1)}{2} + i\sin\frac{2\pi(2n+1)}{3} - \cos\frac{2\pi n}{3} - i\sin\frac{2\pi n}{3} + a(\cos\frac{2\pi(n-1)}{3} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{3} + x_0 + 1)$; luăm $n = 3p$, $3p+1$, $3p+2$ şi obţinem spre exemplu $\frac{2\pi(2\cdot 3p+1)}{3} = 4\pi p + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi n}{3} = 2\pi p$, $\frac{2\pi(n-1)}{3} = 2\pi p - \frac{2\pi}{3}$ etc.

1.316B Valoarea lui a pentru care ecuaţia $\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$ admite o soluţie dublă întreagă este $a = 0$. Adunăm toate coloanele la prima şi obţinem coloana $1, 0, 0$ deci determinantul este $\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ x+a & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 + x + a = f(x) = 0$ şi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, cu rădăcina întreagă $x = 1$, deci $a = 0$.

1.317B Fie $A = C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + 3C_{10}^3 + \ldots + 10C_{10}^{10}$, atunci $A \in (5000, 5200)$. Folosim formula $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, de unde $A = 10(C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + \ldots + C_9^9) = 10 \cdot 2^9 = 5040 \in (5000, 5200)$.

1.318B Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = C_{8x}^{x^2+12}$ unde D este domeniul maxim de definiţie şi $A = \max_{x\in D} f(x)$. Atunci $A = 35960 \in (35000, 36000)$. Avem $x > 0$, $8x > x^2 + 12$ deci $x \in [2, 6]$; $x = 2 \Rightarrow C_{16}^{16} = 1$, $x = 3 \Rightarrow C_{24}^{21} = C_{24}^3 = \frac{24\cdot 23\cdot 22}{2\cdot 3} = 2024$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6 \Rightarrow A \in (35000, 36000)$ obţinem pentru $x = 4$, $C_{32}^{28} = C_{32}^4 = 35960$.

1.319B Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţia $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ are toate soluţiile reale. Ecuaţia este reciprocă, cu schimbarea $x + \frac{1}{x} = t$ se transformă în $t^2 + 2t + a - 2 = 0$, $\Delta = 3 - a > 0 \Rightarrow a < 3$ avem rădăcinile t_1, t_2 şi $x + \frac{1}{x} = t_1, t_2$, $x^2 - t_1x + 1 = 0$, $x^2 - t_2x + 1 = 0$. Toate rădăcinile sunt reale dacă pentru ecuaţia $x^2 - tx + 1 = 0$, $\Delta = t^2 - 4 \geq 0$ deci $t \leq -2$, $2 \leq t$, adică $t_1, t_2 \leq -2$ sau $2 \leq t_1, t_2$ condiţii cunoscute în algebră $2 < t_1 = -1 + \sqrt{3-1}$, $3 < \sqrt{3} - a$. Mai simplu, separăm pe a,

$-a = \frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^2} = f(x)$, se face graficul lui $f(x)$ şi se intersectează cu dreapta $y = -a$; unde intersectează în patru puncte avem toate rădăcinile reale, condiţia este $a \leq -6$.

1.320B Dacă $|z-1| = 2$ şi $|\mathrm{Im} z| \geq 2$ atunci $z = 1 \pm 2i$: cercul $(x-1)^2+y^2 = 4$ intersectează dreaptele (este tangent) $y = \pm 2$ în punctele $1 \pm 2i$.

1.321B Dacă $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ atunci partea reală a numărului $z = \frac{a-b}{1+ab}$ este 0; $a = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $b = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, $z = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6} + i(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6})}{1 + \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{-2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}}{2\cos^2\frac{5\pi}{24} + 2i\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}} = \frac{2i\sin\frac{\pi}{24}(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24})}{2\cos\frac{5\pi}{24}(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24})} = i \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{5\pi}{24}}$.

1.322B Dacă $z = 1 + i$, atunci $z^{4k+1} = (-4)^k z$; $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$, $z^{4k+1} = (-4)^k \cdot z$.

1.323B $z = i^1 \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot \ldots \cdot i^{99} = i^{1+3+5+\ldots 99} = i^{50\cdot 100} = i^{5000} = 1$.

1.324B Dacă $z = \frac{8+6i}{3+4i}$ atunci $|z| = \frac{|8+6i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{64+36}}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$.

1.325B Să se determine $f^5 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$ dacă $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \frac{m+1}{2}z - \frac{m-1}{2}\bar{z}$: $f(z) = \frac{m+1}{2}(x + iy) - \frac{m-1}{2}(x - iy) = x + imy$ deci $f^5(z) = x + im^5y = \frac{z+\bar{z}}{2} + im^5\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{m^5+1}{2}z - \frac{m^5-1}{2}\bar{z}$.

1.326B Numărul $(\sqrt{3} - i)^n$ este real pentru $n = 6k$ $k \in \mathbf{N}$, $(\sqrt{3} - i)^n = (2\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6})$ deci $n = 6k$, $k \in \mathbf{N}$.

1.327B Ecuaţia $C_{3x+4}^{x^2+2x-4} = C_{10}^6$ are evident soluţia $x = 2$ ($3x+4 = 10, x^2 + 2x - 4 = 6$).

1.328B Coeficientul lui x^3 din dezvoltarea lui $(2x^2 + (2 + x))^4$ este 104: $(2x^2 + (2 + x))^4 = (2x^2)^4 + 4(2x^2)^3(2 + x) + 6(2x^2)^2(2 + x)^2 + 4(2x^2)(2 + x)^3 + (2 + x)^4$. x^3 apare numai în ultimii doi termeni: $8 \cdot 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 104$.

1.329B Suma S a soluţiilor reale ale ecuaţiei $x + x^4 + x^7 + \ldots + x^{34} = 0$ este -1: $x(1 + x^3 + (x^3)^2 + \ldots + (x^3)^{11}) = x \cdot \frac{1-(x^3)^{12}}{1-x^3} = x \cdot \frac{1-(x)^{36}}{1-x^3} = 0$ deci avem $x_1 = 0$ şi $x_2 = -1$ ($x_3 = 1$ nu este soluţie) deci $S = -1$.

1.330B Ecuaţia $x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2x^2 + \alpha x + 1 = 0$ nu are toate soluţiile reale pentru $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$: cu schimbarea $x - \frac{1}{x} = t$ ecuaţia devine $t^2 - \alpha t + \alpha^2 + 2 = 0$, $\Delta = -3\alpha^2 - 8 < 0$ deci nu are soluţii reale pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

1.331B Dacă $A_x^7 + 3A_x^5 = 45A$ atunci $1 = \frac{42}{(x-5)(x-6)}$, de unde $x = 12$.

1.332B În dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{20}$ avem 4 termeni raţionali: $T_{k+1} = C_{20}^k\sqrt{2}^{20-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^k = C_{20}^k 2^{\frac{20-k}{2}-\frac{k}{3}}$ deci $k = 6p$, $p = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ termeni 4.

1.333B În dezvoltarea $(5 + n)^n$ al zecelea termen este cel mai mare pentru $n = 12$. $T_{k+1} = C_n^k 5^{n-k}n^k$, $C_n^9 5^{n-9}n^9 > C_n^8 5^{n-8}n^8$, $C_n^9 5^{n-9}n^9 > C_n^{10}5^{n-10}n^{10}$.

1.334B Coeficientul A al lui x^6 din expresia $[(1+x^{\frac{1}{3}})(1+x^{\frac{1}{4}})]^{15} : T_{m+1}T_{p+1} = C_{15}^m \cdot C_{15}^p x^{\frac{m}{3}+\frac{p}{4}}$, $p = 4, 8, 12$, $m = 15, 12, 9$ deci $A = C_{15}^{15}C_{15}^4 + C_{15}^{12}C_{15}^8 + C_{15}^9 C_{15}^{12}$.

1.335B $s_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

1.336B Fie $A = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$. Atunci $A = n2^{n-1}$ (vezi 1.317 B). Folosim formula $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $A = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = n2^{n-1}$.

1.337B Valoarea sumei $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$, $S_n = n(2n+1)$. $S_n = \sum_{k=1}^{n}[(2k)^2 - (2k-1)^2] = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k - n = 4\frac{n(n+1)}{2} - n = n(2n+1)$.

1.338B Termenul liber (care nu-l conţine pe x) din dezvoltarea $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{72}$ este $T_{55} : T_{k+1} = C_{72}^k x^{72-k}(x^{-\frac{1}{3}})^k = C_{72}^k x^{72-\frac{4k}{3}}$, $k = \frac{3\cdot72}{4} = 54$.

1.339B Parametrii reali x, y astfel încât ecuaţia $t^4 - 2xt^2 + y^2 = 0$ cu necunoscuta t să admită soluţii reale în progresie aritmetică verifică egalitatea $3x = 5|y|$. Rădăcinile z_1, z_2, t_3, t_4 le notăm $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$ (raţia este $2r$) şi avem $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4a = 0$ deci $a = 0$ şi $t_1t_2t_3t_4 = 9r^4 = y^2$, $r^2 = \frac{|y|}{3}$. Dar $(t^2)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - y^2}$ de unde rezultă $x > 0$, $t^2 = r^2 = x - \sqrt{x^2 - y^2} = \frac{|y|}{3} \Rightarrow 3x = 5|y|$.

1.340B Ecuaţia $x^3 - 3x - \sin\varphi = 0$ are trei rădăcini reale distincte deoarece: notând $f(x) = x^3 - 3x - \sin\varphi$, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$ sunt abscise de maxim $f(-1) = 2 - \sin\varphi > 0$ şi de minim $f(1) = -2 - \sin\varphi < 0$ deci şirul lui Rolle corespunzător ne dă $-$, $+$, $-$, $+$, rezultă trei rădăcini. Algebric, fără derivată, probăm semnul lui f în puncte uşor de calculat, spre exemplu $-\infty$, -1, 1, $+\infty$.

1.341B Soluţia reală a ecuaţiei $x^3 - 5x - 1 = 0$ este un număr iraţional. Presupunem contrariul şi fie $x_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $\frac{p}{q}$ ireductibilă. Avem $p^3 = q^2(q - 5p)$ deci p conţine factori ai lui q, absurd rezultă x_0 iraţional.

1.342B Valorile parametrilor reali α, β, γ astfel încât polinomul $f = 3x^4 - 16x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ să aibă rădăcina $2 + i$ şi să fie devizibil cu $x - 1$ sunt $\alpha = 22$, $\beta = -24$, $\gamma = 5$. Condiţiile se scriu $f(1) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 13$ împărţim f la $g = [x - (2 + i)][x - (2 - i)] = x^2 - 4x + 5$ şi obţinem restul

$(4\alpha + \beta - 104)x + (\gamma - 5\alpha + 155) \equiv 0$ (câtul este $3x^2 - 4x + (\alpha - 31)$) deci rezultă sistemul $4\alpha + \beta = 104$, $5\alpha - \gamma = 155$, $\alpha + \beta + \gamma = 13$ cu soluţia $\alpha = 32$, $\beta = -24$, $\gamma = 5$. Mai putem pune condiţia $f(2 + i) = 0$ şi obţinem două ecuaţii.

1.343B Valorile coeficienţilor $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ să admită soluţia $1+i^\circ$ sunt $a = -10$, $b = 18$. Procedăm ca în 1.342 împărţind $f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ la $g = [x - (1+i)][x - (1-i)] = x^2 - 2x + 2$ şi facem restul echivalent cu 0 sau înlocuim în f pe $1 + i$: $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^3 = -2 + 2i$, $(1 + i)^4 = -4$ şi avem $-4 + 2(-2 + 2i) + 6i + a + ai + b = 0 \Rightarrow a + b = 8$, $a + 10 = 0$, $a = -10$, $b = 18$.

1.344B Ştiind că polinomul $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a - 1)x - 1$ se divide cu $(x - 1)^3$ să se calculeze suma $S = a + b + c$. Condiţia se scrie $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$ şi se obţine sistemul $2a + b + c = 2$, $5a + 3b + 2c = 1$, $6a + 3b + c = 0$ cu soluţia $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$ deci $S = 0$. Altfel scriem $f = (x - 1)^3(mx + n)$ şi dăm valori lui x, spre exemplu $x = 1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -\frac{n}{m}$ sau identificăm coeficienţii gradelor egale din cei doi membri.

1.345B Numărul n al valorilor complexe distincte pe care le ia funcţia polinomială $P(x) = x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 7$ dacă x este soluţie a ecuaţiei $x^3 + x + 1 = 0$ este $n = 1$: grupăm termenii lui $P(x)$, $P(x) = (x^6 + x^4 + x^3) + 2(x^5 + x^3 + x^2) + 4(x^4 + x^2 + x) + (x^3 + x + 1) + 6$, deci $P(x_i) = 6$ $(\forall)x_i$, $i = 1, 2, 3$.

1.346B Numărul $m = \frac{1}{1+x_1}\cdot\frac{1}{1+x_2}\cdot\frac{1}{1+x_3}\cdot\frac{1}{1+x_4}\cdot\frac{1}{1+x_5}$ unde x_1, x_2, x_4, x_5 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ unde $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 4$ este $m = \frac{2}{3}$: $f(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$, $f(-1) = -2(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)(1 + x_5)$ deci $m = \frac{-2}{f(-1)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$. Se poate folosi Viétte: $\frac{1}{m} = 1 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_5) + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_4x_5) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots) + (x_2x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + \ldots) + x_1x_2x_3x_4x_5$.

1.347B Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $z = (1 - m)i^3 - 2(1+m)i^2 + 3mi + 1$ să fie real sunt $m = \frac{1}{4}$; $z = (m-1)i + 2(1+m) + 3mi + 1$, $\mathrm{Im}z = 4m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$.

1.348C Dacă $z, z' \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z| = |z'| = 1$, $zz' + 1 \neq 0$ şi $w = \frac{z+z'}{1+zz'}$, atunci $w = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta' + i\sin\theta'}{1 + (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{\cos\theta + \cos\theta' + i(\sin\theta + \sin\theta')}{1 + (\cos\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')} = \frac{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2} + 2i\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{2\cos^2\frac{\theta+\theta'}{2} + 2i\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \frac{2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}(\cos\frac{\theta+\theta'}{2} + i\sin\frac{\theta+\theta'}{2})}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}(\cos\frac{\theta+\theta'}{2} + i\sin\frac{\theta+\theta'}{2})} = \frac{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} \in \mathbf{R}$.

1.349C Să se determine $z \in \mathbf{C}$, dacă $\bar{z} + |z| \neq 0$ şi $w = \frac{z+|z|}{\bar{z}+|z|}$ este real. $w = \frac{\rho(\cos\theta + i\sin\theta) + \rho}{\rho(\cos\theta - i\sin\theta) + \rho} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\theta + i\sin\theta = z \in \mathbf{R}$.

1.350C Suma $S = 1 + 2i + 3i^2 + \ldots + ni^{n-1}$ este egală cu $\frac{1}{2}[i - (n+1)i^{n+1} - ni^n]$,

$i \cdot S = i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + (n-1)i^{n-1} + ni^n$, $S - iS = (1-i)S = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{n-1} - ni^n \Rightarrow S = \frac{1}{1-i}\left[\frac{1-i^n}{1-i} - ni^n\right] = \frac{1}{2}[i - (n+1)i^{n+1} - ni^n]$.

1.351C $S = 1-(1-i)+(1-i)^2-(1-i)^3+(1-i)^4-(1-i)^5 = \frac{1-[-(1-i)]^6}{1+1-i} = 2-3i$ sau $S = i - 2i + 2 + 2i - 4 + 4 - 4i = 2 - 3i$.

1.352C Pentru $S = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$ folosim formula $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1}C_n^k$, $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{(n+1)}C_{n+1}^{k+1} \Rightarrow S = \frac{1}{(n+1)}[C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

1.353C Câte numere de cinci cifre în care nu se repetă nici una dintre cifre se pot forma cu cifrele $0, 2, 3, 5, 6$. Cu 5 cifre se pot forma 5! numere dar cele care au prima cifră 0 în număr de 4! nu se consideră deci $5! - 4! = 4!4 = 96$.

1.354C Termenul dezvoltării $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5$ care nu-l conţine pe x este egal cu 51. $\left[(1+x) + \frac{1}{x}\right]^5 = (1+x)^5 + 5(1+x)^4\frac{1}{x} + 10(1+x)^3\frac{1}{x^2} + 10(1+x)^2\frac{1}{x^3} + 5(1+x)\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$, ultimii trei termeni nu conţin termeni liberi (fără x) iar primii trei ne dau: $1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 51$.

1.355C Să se determine $S = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$. Fie $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \ldots$ deci $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$. Dar $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = 2^{n-1}$ şi adunând rezultă $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

1.356C O urnă are 10 bile albe şi 4 bile negre, toate numerotate diferit. În câte moduri diferite se pot extrage trei bile astfel încât cel mult una din bile să fie albă. Avem $10 \cdot C_{40}^2$ cazuri cu o bilă albă şi C_{40}^3 cazuri cu 3 bile negre, deci în total $10 \cdot C_{40}^2 + C_{40}^3 = 17680$ cu cel mult o bilă albă.

1.357C C.m.m.d.c. al tuturor numerelor $7^{4n+1} - 7$ $(\forall)n \in \mathbf{N}$ este $7^5 - 7$: $7[(7^4)^n - 1] = 7 \cdot (7^4 - 1)\left((7^4)^{n-1} + (7^4)^{n-2} + \ldots + 7^4 + 1\right)$. Altfel, prin inducţie: $P(n)$ înseamnă $7^{4n+1} - 7 = (7^5 - 7)p$ iar $P(m+1)$, $7^{4n+5} - 7 = 7^4[(7^5 - 7)p + 7] - 7 = (7^5 - 7)(7^4 p + 1)$.

1.358C Suma S a coeficienţilor polinomului $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})^{10}$ este $S = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$. Se dezvoltă polinomul şi se face $x = 1$.

1.359C $S_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$ se obţine dezvoltând $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n) \cdot (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}x + C_n^n)$ şi egalând coeficientul lui x^n din membrul stâng C_{2n}^n cu coeficientul lui x^n din membrul drept $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2$ obţinut operând pe verticală, $(C_n^k x^{n-k})(C_n^k x^k) = (C_n^k)^2 x^n$.

1.360C În dezvoltarea $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{200}$ numărul n al termenilor raţionali este $n = 51$. $T_{k+1} = C_{200}^k 3^{\frac{200-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}$ deci $k = 4p$, $p = 0, 1, 2, \ldots, 50$ de unde $n = 51$.

1.361C Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ pentru care ecuaţia $(a-2)x^4 - 2(a+1)x^3 - ax^2 + 2(a+1)x + (a-2) = 0$ are toate rădăcinile reale este $a \geq \frac{7}{8}$, $a \neq 2$. Procedăm ca în 1.361B sau 1.269A făcând schimbarea $x - \frac{1}{x} = t$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$ (ecuaţia este reciprocă), sau separăm parametrul a, $\frac{a}{2} = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1} = f(x)$, facem graficul funcţiei $y = f(x)$ şi intersectăm cu $y = \frac{a}{2}$. Obţinem $a \geq \frac{7}{8}$, $a \neq 2$.

1.362C O condiţie necesară şi suficientă ca rădăcinile polinomului $f = x^3 + ax^2 + bx + 2$, $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ să fie în progresie geometrică este $b = a\sqrt[3]{2}$. Rădăcinile vor fi $x_1 = \frac{\alpha}{q}$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha q$, Viette ne dă $x_1 x_2 x_3 = \alpha^3 = -2$ deci $\alpha = -\sqrt[3]{2}$ şi înlocuim în ecuaţie $-2 + a(\sqrt[3]{2})^2 - b\sqrt[3]{2} + 2 = 0$ deci $b = \sqrt[3]{2}a$.

1.363C Polinomul $x^4 + x^2 + 1$ este reductibil peste $\mathbf{R}$: $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ deci reductibil şi peste Q.

1.364C Câte polinoame $P(x)$ de gradul 3 cu coeficienţi întregi satisfac condiţiile $P(7) = 5$, $P(15) = 9$. Fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$; $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = 5$, $a \cdot 15^3 + b \cdot 15^2 + c \cdot 15 + d = 9$, $P(15) - P(7) = 8m = 4$, $2m = 1$, $m \in \mathbf{Z}$ imposibil deci nici un polinom.

1.365C Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$ ştiind că admite soluţia $x_1 = 3i$. Deci admite şi soluţia $x_2 = \bar{x}_1 = -3i$ şi atunci $f(x)$ se divide prin polinomul $g(x) = x^2 + 9$. Împărţim f la g sau descompunem în factori: $6x^2(x^2+9) + x(x^2+9) - 2(x^2+9) = 0$, $(x^2+9)(6x^2 + x - 2) = 0$, $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$.

1.366C Dacă soluţiile ecuaţiei $z^3 - (4+i)z^2 + mz - 7i + 4 = 0$, $m \in \mathbf{C}$ sunt $z_1 = i$, $z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cât este $a = m + z_2 + z_3^2$? Înlocuim i în ecuaţie şi obţinem $m = 7 + 8i$, descompunem în factori (sau împărţim prin $x - i$) şi rezultă $(z-i)(z^2 - 4z + 7 + 4i) = 0$ cu rădăcinile $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 3 - 2i$ sau $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 1 + 2i$, deci a poate lua două valori, $a \in \{13 - 2i, 7 + 10i\}$.

1.367C Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ sunt soluţii complexe ale ecuaţiei $x^{100} + x^{99} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$ şi $S = \sum_{k=1}^{100} x_k^{103}$, atunci $S = -1$. Ecuaţia se scrie $\frac{x^{101}-1}{x-1} = 0$, $x \neq 1$ deci $x_k = \sqrt[101]{1} = \cos\frac{2k\pi}{101} + i\sin\frac{2k\pi}{100}$, $k = 1, 2, \ldots, 100$ $(k = 0,\ z_0 = 1$ nu o luăm). Dar $x_k^{101} = 1$, $x_k^{103} = x_k^2$, deci $S = \sum_{k=1}^{100} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{100} x_k\right)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{99}x_{100}) = 1 - 2 = -1$.

1.4 Matrice. Determinanţi. Sisteme liniare

1.368A Mulţimea M, a tuturor valorilor lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă, oricare ar fi x, este $M = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$: $\det A = (1-m)x^2 + 2x + 3 - m$, $\Delta = -2m^2 + 5m - 2$. A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$ deci dacă $\Delta = 0$ nu are rădăcini reale, rezultă $\Delta < 0$ prin urmare $m \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ unde $m_1 = \frac{1}{2}$ şi $m_2 = 2$ sunt rădăcinile ecuaţiei $\Delta = 0$, $2m^2 - 5m + 2 = 0$.

1.369A Dacă M este mulţimea acelor $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + mz = 1 \\ x - y + m^2 z = m \\ 2x + (m+1)z = m^2 \end{cases}$$

este incompatibil, iar $S = \sum_{m \in M} m$, atunci $S = \frac{1}{2}$. Dacă determinantul Δ al sistemului este 0 iar determinantul caracteristic Δ^* diferit de 0 atunci sistemul este incompatibil (rangul matricei sistemului este diferit de rangul matricei extinse): $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -1 & m^2 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix}$, $\Delta^* = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix}$, $\Delta = 2m^2 - m - 3 = 0$ pentru $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{3}{2}$, $\Delta^* = -3m^2 + 2m + 2$ nu se anulează pentru $m = -1$ şi $m = \frac{3}{2}$ deci sistemul este incompatibil pentru $m = -1$, $m = \frac{3}{2}$ iar $S = \frac{1}{2}$.

1.370A Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ atunci matricea X soluţie a ecuaţiei matriceale $AXB = C$ are suma elementelor $S = -15$: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ unde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$.

1.371A Dacă $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$, calculaţi $S = A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$. ε este rădăcină cubică a unităţii, $x^3 - 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ iar

$A^2 = 2A$, $A^3 = 2^2 A$, $A^4 = 2^3 A, \ldots, A^{n-1} = 2^{n-2} A$ deci $S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2})A = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} A = (2^{n-1} - 1)A$.

1.372A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ satisface egalitatea $A^3 = mA^2 + nA$ pentru $m = 5$, $n = -4$: $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$ deci $8m + 2n = 32$, $m + n = 1$, $m = 5$, $n = -4$.

1.373A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru $a = 0$ şi $b = -1$; calculăm determinanţii de ordinul trei, îi anulăm şi găsim condiţia $a = 0$, $b = -1$ sau aplicăm procedeul Gauss.

1.374A Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ dacă determinantul $D = \det A = -x^2 + (m+1)x - (2m+1)$ are rădăcini imaginare, deci $\Delta = m^2 - 6m - 3 < 0 \Rightarrow m \in (3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$.

1.375A Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinaţi a şi b astfel încât $AB = BA$: $AB = \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = BA \Rightarrow a = 2$, $b \in \mathbf{R}$.

1.376A Ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ are soluţia $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\Delta \neq 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$.

1.377A Matricele de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ pentru care $A^2 - 3A = -2I$ sunt $A = I$, $A = 2I$: $\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 - y^2 - 3x = -2$, $2xy - 3y = 0$, $y(2x-3) = 0 \Rightarrow y = 0$ şi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

sau $x=\frac{3}{2}$ şi $y^2=-\frac{1}{4}$ deci $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

1.378A Soluţiile ecuaţiei $\begin{vmatrix} x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ m^2 & -m & x\end{vmatrix}=0$ sunt $x\in\{-1,-m,m-1\}$.

$x^3+x(-m^2+m-1)+m^2-m=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x-m^2+m)=0$, $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-1\pm|2m-1|}{2}=\begin{cases}-m\\ m-1\end{cases}$.

1.379A Valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3}\\ x_3 & x_1 & x_2\\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_1}\end{vmatrix}$ unde x_1,x_2,x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-3x^2+x+1=0$ este $\Delta=6$. Ecuaţia se scrie $(x-1)(x^2-2x-1)=0$ cu rădăcinile $x_1=1$, $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}$. Altfel: $\Delta=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{x_1x_2x_3}=\frac{1-(3^2-2)}{-1}=6$.

1.380A Dacă $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-2&-3\\1&2&3\end{pmatrix}$ şi $f(x)=2x^3+3x$, atunci $\det f(A)$ cu $f(A)=2A^3+3A$ este 140. Rezultă că A^2, A^3, $f(A)$ sunt succesiv

$$2\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-1&-1\\3&1&2\end{pmatrix},\quad 2^3\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&0&-1\\3&1&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}19&8&19\\-13&-6&-17\\27&14&33\end{pmatrix},$$

deci $\det f(A)=140$.

1.381A Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&5&11\\5&1&7\\10&8&15\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}$ şi $AXA=B$. Atunci $(x,y,z)=(1,2,3)$: cu Gauss în două etape se calculează inversa A^{-1} a matricei A $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right),\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

deci

$$X=A^{-1}BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&11\\5&1&7\\10&8&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&2&7\\5&1&7\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

1.382A Valorile parametrilor reali a,b,c astfel încât sistemul $2x-3y+4z-5t=1$, $x+9y+az+t=-3$, $5x-6y+10z-bt=c$ să fie compatibili. Fie determinaţii

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&9&a\\5&-6&10\end{vmatrix},\quad \Delta_b=\begin{vmatrix}2&-3&-5\\1&9&1\\5&-6&b\end{vmatrix},\ \Delta_c=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&9&-3\\5&-6&c\end{vmatrix}.$$

$\Delta_a=-3a+6$, $\Delta_b=-21b+252$, $\Delta_c=21c-42$. Dacă $\Delta_a\neq0$ deci $a\neq2$ şi $b,c\in\mathbf{R}$ sau $\Delta_b\neq0$ deci $b\neq12$, $a,c\in\mathbf{R}$ sistemul este compatibil determinat (soluţie unică): dacă $a=2$, $b=12$ ($\Delta_a=\Delta_b=0$) şi $\Delta_c\neq0$ deci $c\neq2$ sistemul este incompatibil iar dacă $a=2$, $b=12$, $c=2$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat (rangul matricei extinse este egal cu rangul matricei).

1.383A Numărul de soluţii reale ale sistemului $2x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+2y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+2z^2=6$ este 8: adunăm toate ecuaţiile $x^2+y^2+z^2=\frac{7}{2}\Rightarrow x^2=y^2=\frac{1}{2}$, $z^2=\frac{5}{2}$, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, deci opt soluţii.

1.384A Numărul n de soluţii reale ale sistemului $2xy+yz+xz=1$, $xy+2yz+zx=2$, $xy+yz+2xz=3$ este $n=0$. Adunăm toate ecuaţiile $xy+yz+xz=\frac{3}{2}\Rightarrow xy=-\frac{1}{2}$, $yz=\frac{1}{2}$, $zx=\frac{3}{2}\Rightarrow(xyz)^2=-\frac{3}{8}$, deci $n=0$.

1.385A Sistemul $ax+by+cz=a$, $cx+ay+bz=b$, $bx+cy+az=c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$ distincte are soluţie unică dacă şi numai dacă $a+b+c\neq0$: determinantul sistemului

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\c&a-c&b-c\\b&c-b&a-b\end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\neq0\Leftrightarrow a+b+c\neq0,$$

se aplică Cramer.

1.386A Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 14587 & 14597 \\ 29243 & 29253 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14587 & 10 \\ 29243 & 10 \end{vmatrix} = 10(14587 - 29243) = -146560.$

1.387A Determinaţi $x, y \in \mathbf{R}$ astfel ca $\Delta = \begin{vmatrix} x+y & xy & 0 \\ 1 & x+y & xy \\ 0 & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0$: $\Delta = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = (x+y)(x^2+y^2)$ deci condiţia este $x+y=0$.

1.388A Valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 \end{vmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x + 5 = 0$ este $\Delta = -11$: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -6$, $x_1x_2x_3 = -5$, $\Delta = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 = -11$.

1.389A Ecuaţia $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ are soluţiile $x \in \left\{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$: $\Delta = x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, $(x-1)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1.390A Dacă matricea pătrată A are proprietatea $A^3 = 0$ atunci $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$: se verifică uşor că $B = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$ este inversa matricei $I - A$; $(I - A)(I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + \ldots) = (I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots) - (A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + A^{n+1} + \ldots) = I$ deci $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$.

1.391A Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. $\det A = -1$, matricea complementilor algebrici înmulţită cu $\frac{1}{\det A}$ (deci cu semn schimbat) este

$$A' = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

iar transpusa $(A')^t = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.392A oricare ar fi matricele pătrate A, B avem $(A+B)^3 = (A+B)(A^2 + AB + BA + B^2) = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$.

1.393A Dacă $f, g, h, k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt derivabile şi $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix}$ atunci derivata $\Delta'(x)$ a lui $\Delta(x)$ este $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ h(x) & k(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ h'(x) & k'(x) \end{vmatrix}$; $\Delta'(x) = (f(x)k(x) - g(x) \cdot h(x))' = [f'(x)k(x) - g'(x)h(x)] + [f(x)k'(x) - g(x)h'(x)]$.

1.394A Matricele de tipul $A_x = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$ verifică evident relaţia $A_x + A_y = A_{x+y}$ $\left(A_x + A_y = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -(x+y) \\ -(x+y) & x+y \end{pmatrix} = A_{x+y}\right)$ dar nu verifică relaţia $A_x^2 = xA_x$, $x \neq 0$ $\left(A_x^2 = x^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2xA_x\right)$.

1.395A Fie $M \in M_n(\mathbf{R})$ cu elementele $a_{ij} = \max\{i, j\}$, $i, j = \overline{1, n}$ şi $\Delta = \det M$. Atunci $\Delta = (-1)^{n+1}n$. Pentru simplitate luăm $n = 5$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot 5.$$

1.396A Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, valorile lui x şi y astfel încât $AB = BA$ sunt $x = 0$, $y = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 2(1+y) & 2(1+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & 1+2x \\ y+2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $1 + y = 1 + 2x$, $1 + x = 1 + 2x$, $2(1+y) = y + 2$, $2(1+x) = y + 2 \Rightarrow y = 2x$, $x = 0$, $y = 0$.

1.397A Determinantul

$$\Delta_{x,y} = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} = -2(x+y)(x^2-xy+y^2) = -2(x^3+y^3).$$

1.398A Numărul soluţiilor (reale !) ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & m \end{vmatrix} = 0$ care sunt independente de m este $n = 1$. Ecuaţia $-m(x^3+1)+(-x^3+x^2+2x) \equiv 0$ în m deci $x^3+1 = 0$, $x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, rezultă $n = 1$.

1.399A Fie sistemul (S) $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = a^{i-1}$, $i = \overline{1,4}$, $a \in \mathbf{R}^*$, $a_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$, $i, j = \overline{1,4}$ şi $A = \{a \in \mathbf{R}^* | (S)$ este compatibil nedeterminat$\}$ atunci $A = \{1\}$. Sistemul, determinantul sistemului Δ şi determinantul caracteristic Δ_c pentru valoarea $a = 3$ se scriu succesiv:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a^3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 27 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = (a+3)(a-1)^3, \quad \Delta_x = -320 \neq 0.$$

Deoarece pentru $a = -3$ determinantul caracteristic $\Delta_c \neq 0$ sistemul este incompatibil, iar pentru $a = 1$ toţi minorii caracteristici sunt $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat (triplu nedeterminat, soluţia depinde de trei parametri).

1.400A Soluţia inecuaţiei $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} \geq 0$ este $\{-1\} \cup [\frac{1}{2}, \infty)$. Inecuaţia se scrie $(x+1)^2(2x-1) \geq 0 \Rightarrow x = -1, x \geq \frac{1}{2}$.

1.401A Suma S a soluţiilor (reale) distincte ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ este $S = 0$. Determinantul este Vandermonde $\Delta = (x^2-x)(x^3-x)(x^3-x^2) = x^4(x-1)^3(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$, $S = 0$.

1.402A Dacă $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbf{R}$ şi $M = 2xX - X^2$, atunci $M = x^2 I_2$:

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = x^2 I_2.$$

1.403A Dacă $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$, $z^3 = 1$ şi $D = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$, atunci $D = z$, $D = z^2(z^2+z+1)+z = z$ deoarece $z^2+z+1 = 0$.

1.404A Valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+4a)(x-a)^4.$$

1.405A Dacă w este o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1 = 0$ atunci suma $S = \sum_{k=1}^{3p} \begin{pmatrix} w^k & w^{2k} & w^{3k} \\ w^{3k} & w^k & w^{2k} \end{pmatrix}$ are valoarea $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3p} w^k & \sum_{k=1}^{3p} w^{2k} & \sum_{k=1}^{3p} w^{3k} \\ \sum_{k=1}^{3p} w^{3k} & \sum_{k=1}^{3p} w^k & \sum_{k=1}^{3p} w^{2k} \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{3p} w^{3p} = 3p$$

$$\sum_{k=1}^{3p} w^k = (w+w^2+w^3)+(w^4+w^5+w^6)+\ldots+(w^{3p-2}+w^{3p-1}+w^{3p}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3p} w^{2k} = (w^2+w^4+w^6)+(w^8+w^{10}+w^{12})+\ldots+(w^{2(3p-2)}+w^{2(3p-1)}+w^{2\cdot 3p}) = 0$$

deci $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Altfel: $\sum_{k=1}^{3p} w^k = w\frac{1-w^{3p}}{1-w}$, $\sum_{k=1}^{3p} w^{2k} = w^2\frac{1-w^{2(3p)}}{1-w^2}$

1.406A Pentru câte valori ale lui $m \in \mathbf{R}$ sistemul $\begin{cases} x - my + z = 2 \\ x + y - mz = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat ? Determinantul sistemului $\Delta = 2m(m+1)$

şi cei doi determinaţi caracteristici obţinuţi pentru valorile $m = 0$ şi $m = -1$ sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 2m(m+1)$, deci pentru $m \neq 0$ şi $m \neq -1$ sistemul este compatibil determinat iar pentru $m = 0$ sau $m = -1$ deci pentru două valori sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

1.407A Valorile lui $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ să aibă soluţie unică. Se calculează determinantul matricei extinse $\Delta = 4a - 3$, deci $a = \frac{3}{4}$.

1.408A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să aibă numai soluţia banală (nulă). Determinantul Δ trebuie să fie $\neq 0$: $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2$ deci $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

1.409A Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $x+my+z = 0$, $mx+y+z = 0$, $x + y + mz = 0$ să aibă şi soluţii nebanale (nenule) sunt date de anularea determinantului sistemului $\Delta = (m+2)(m-1)^2$ deci $m = -2$, $m = 1$.

1.410A Sistemul $\begin{cases} ax + y = a \\ bx - y = b \end{cases}$ este compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow a^2+b^2 = 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$ sau $a = 0$, $b = 0$ $(a, b \in \mathbf{C})$: determinantul sistemului $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -(a+b) = 0$ şi determinantul caracteristic $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & -b \end{vmatrix} = a - b = 0$ deci $a = b = 0$.

1.411A Fie $A = \{m, m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} mx + 2y = 2m - 2 \\ 2x + my = m \end{cases}$ are soluţie unică$\}$ şi $S_m = x_m + y_m$, $m \in A$, unde (x_m, y_m) este soluţia sistemului. Avem $A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$: $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$, $\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m-2 & 2 \\ m & m \end{vmatrix} = 2m(m-2)$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 2m-2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (m-2)^2$; $\Delta \neq 0$ dacă $m \neq \pm 2$, $x_m = \frac{2m}{m+2}$, $y_m = \frac{m-2}{m+2}$, $S_m = \frac{3m-2}{m+2}$.

1.412A Sistemul $2x+y-z = -1$, $x+5y+4z = 4$, $x+2y+z = m$, $m \in \mathbf{R}$ este compatibil nedeterminat dacă rangul matricei extinse este 2 (rangul matricei sistemului este 2, determinantul ei fiind 0) deci $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 9m - 9 = 0$, $m = 1$.

1.413A Deoarece inversa matricei $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ soluţia ecuaţiei $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

1.414A Sistemul $mx+2y-z = 2$, $x+(m+2)y-2z = m+2$, $x+y+(m-1)z = m+2$ este compatibil dacă $m \neq 1$

$$\Delta = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & m+2 & -2 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m+1)^2(m-1).$$

Pentru $m \neq -1$, $m \neq 1$ este compatibil determinat, pentru $m = -1$ este compatibil nedeterminat (determinantul caracteristic este 0), şi pentru $m = 1$ este incompatibil.

1.415B Fie sistemul $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + a^5 t = 0 \end{cases}$ şi $A = \{a \in \mathbf{R}|$ sistemul admite şi soluţii nebanale$\}$, iar $S = \sum_{a \in A} a$. Atunci $S = 0$. Determinantul sistemului $\Delta(a) = -a(3a^4 - 2) = 0$, $a_1 = 0$, $a_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S = 0$.

1.416B Numărul k al tripletelor $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ pentru care rangul matricei $\begin{pmatrix} a^3 & 1 & c^2 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & b^3 \end{pmatrix}$ este egal cu 1 este $k = 6$: toţi minorii de ordinul doi trebuie să fie 0. Rezultă $a = -1$, $c = \pm\sqrt{2}i$, $b^3 + 2 = 0$ deci 3 valori ia $b \Rightarrow k = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

1.417B Suma $S = \alpha+\beta$ pentru care sistemul $\begin{cases} x-\alpha y+2z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y-z=\beta \end{cases}$ este compatibil nedeterminat este $S=-3$. Determinantul sistemului este $\Delta(\alpha) = -3(\alpha+1)$ iar determinantul caracteristic $\Delta(\beta) = -3(\beta+2)$ deci $\alpha=-1$ şi $\beta=-2$, iar $S=-3$.

1.418B Valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} =$

$abc \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c}-\frac{1}{b} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = -abc \begin{vmatrix} \frac{b-c}{bc} & \frac{b-a}{ba} \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = (b-c)(a-b)(c-a).$

1.419B Valorile parametrilor reali α şi β pt. care sistemul $\begin{cases} 2x-y-4z=6 \\ \alpha x-y+z=2 \\ 2x+\beta y-4z=2\beta \end{cases}$ este compatibil nedeterminat. Determinantul sistemului şi determinantul caracteristic sunt $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 2 & \beta & -4 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2\beta \end{vmatrix}$, $\Delta = -2(\beta+2\alpha+2\alpha\beta+1)=0$, $\Delta_1 = 4(\beta-2\alpha\beta+6\alpha-3)=0$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$.

1.420B Să se determine matricea $M = A^2+2AB+B^2$ dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, $2AB = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $M = \begin{pmatrix} 25 & 8 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$.

1.421B Dacă $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $A^n = (2^n-1)A + (2-2^n)I_2$. Se verifică direct pe grilă luând $n=1,2,3$ sau prin inducţie: $A^2 = 3A-2I_2 = 2A+A-2I_2$, $A^{n+1} = A^nA = [(2^n-1)A+(2-2^n)I_2]A = (2^n-1)A^2 + (2-2^n)A = (2^n-1)(2A+A-2I)+2A-2^nA = 2^{n+1}A-2A+2^nA-A-2^{n+1}I_2+2I_2+2A-2^nA = (2^{n+1}-1)A+(2-2^{n+1})I_2$ deci $P_n \to P_{n+1}$.

1.422B Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze A^n, $n \geq 1$. Dacă

notăm $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ atunci $A = I_3+B$ şi deoarece $I_3B = BI_3$ se aplică binomul lui Newton pentru calculul $A^n = (I_3+B)^n$ şi se ţine cont că $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3=0$, $B^n=0$, $n \geq 3$; rezultă $A^n = I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.423B Urma (suma elementelor de pe diagonala principală) matricei X care satisface ecuaţia $A^nX = B^n$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $A^n = \left(I_2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = I_2+n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^n = \left(I_2+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = I_2+n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ (am folosit proprietăţile $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = 0$, $k \geq 2$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k = 0$, $k \geq 2$) deci $X = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n^2 & -n \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ deci urma lui X este n^2+2.

1.424B Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ este nesingulară (există A^{-1}, deci $\det A \neq 0$) $\Leftrightarrow (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$; $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$, determinantul este Vandermonde.

1.425B Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care există $a,b,c \in \mathbf{R}$, nu toate nule, astfel încât $aA+bB+cC=0$. Rezultă sistemul $\begin{cases} a+mc=0 \\ 2a+b+3c=0 \\ 2a-b+2c=0 \end{cases}$ cu determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5-4m=0$ deci $m=\frac{5}{4}$.

1.426B Matricele A, A^2, A^3, A^4 în această ordine sunt $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$, $A^4 = I_4$ deci $A^{20} = (A^4)^5 = I_4$.

1.427B Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2 \end{pmatrix}$ unde $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ este $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{pmatrix}$. Ecuaţia se scrie $(x-1)^2(x+1)$ deci $A = \begin{pmatrix} 1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1 \end{pmatrix}$ cu $\det A = -4$, matricea complementilor algebrici (egală cu transpusa ei) şi inversa sunt

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1&1\\1&1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1&1\\-1&1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1&-1\\-1&1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1&-1\\1&1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1&-1\\-1&1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1&1\\-1&1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1&-1\\-1&1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1&-1\\1&1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1&1\\1&-1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{pmatrix}.$$

1.428B Determinantul D al matricei $A \in M_3(\mathbf{R})$ cu elementele $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1 \leq j \leq i \leq 3 \\ 0, & 1 \leq i < j \leq 3 \end{cases}$ este $D = \frac{1}{24}$; $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

1.429B Valorile lui a pentru care sistemul $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = a \\ x + y + (1+a)z = a^2 \end{cases}$ este incompatibil sunt $a = -3$, $a = 0$. Determinantul sistemului şi determinantul

caracteristic pentru $a = -3$ sunt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a \end{vmatrix} = (a+3)a^2, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} -2&1&1\\1&-2&-3\\1&1&9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

deci pentru $a \neq -3$ şi $a \neq 0$ sistemul este compatibil determinat, pentru $a = -3$ sistemul este incompatibil iar pentru $a = 0$ sistemul este tot incompatibil deoarece determinanţii caracteristici $\begin{vmatrix} 1&1\\1&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1&1\\1&0 \end{vmatrix}$ sunt diferiţi de 0.

1.430B Sistemul cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_7$: $\begin{cases} \hat{m}x + y + z = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y + mz = m \\ x + my + z = m^2 \end{cases}$ este compatibil pentru orice $m \in \mathbf{Z}_7$, determinantul său este $\Delta = -m^3 + \hat{6}m - \hat{5}$ cu $m = \hat{1}$ rădăcină, deci pentru $m \neq \hat{1}$ soluţie unică (Cramer) iar pentru $m = \hat{1}$ determinantul caracteristic este $\hat{0}$.

1.431B Expresia $E = \frac{x^2+y^2+2z^2+2t^2}{2x^2+2y^2+z^2+t^2}$ unde x, y, z, t reprezintă o soluţie nenulă arbitrară a sistemului $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 4y + 9y + 16t = 0 \end{cases}$ are valoarea $E = 1$. Considerând y, z, t necunoscute principale şi x parametru, sistemul $y+z+t = -x$, $2y + 3z + 4t = -x$, $2^2y + 3^2z + 4^2t = -x$ are determinantul Vandermonde $D = 2$ şi $\Delta_y = -6x$, $\Delta_z = 6x$, $\Delta_t = -2x$, $y = -3x$, $z = 3x$, $t = -x$, $E = \frac{x^2+9x^2+18x^2+2x^2}{2x^2+18x^2+9x^2+x^2} = 1$.

1.432B Sistemul $\begin{cases} ax + a^2y + z = 1 \\ ax + ay + a^2z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ având $\Delta = \begin{vmatrix} a&a^2&1\\a^2&a&a^2\\1&1&a \end{vmatrix} = -(1+a+a^2)(x-1)^2a$ este de tip Cramer pentru $a \neq 1$, este compatibil nedeterminat pentru $a = 0$ (sistemul devine $z = 1, x+y = 0$) iar pentru $a = 1$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat (se reduce la o ecuaţie $x + y + z = 1$).

1.433B Sistemul $\begin{cases} x + z = a \\ x + (a^2-1)y + z = a \end{cases}$ echivalent cu $\begin{cases} x + z = 0 \\ (a^2-1)y = 0 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat pentru $a = \pm 1$ cu soluţia $(x, y, z) = (x, y, -x)$.

1.434B Sistemul $\begin{cases} x + y + \alpha z = -\alpha \\ x + \alpha y + z = \alpha + 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha + 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ cu $\begin{vmatrix} 1&1&\alpha\\1&\alpha&1\\\alpha&1&1 \end{vmatrix} = -(\alpha+2)(\alpha-1)^2$ admite soluţie unică (Cramer) pentru $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$.

1.435C Sistemul $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \\ 5x+4y=m \end{cases}$ cu $\Delta_m = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & m \end{vmatrix} = -3m+69$ determinantul caracteristic (determinantul matricei extinse) este compatibil pentru $m=23$ (direct, x,y din primele două ecuaţii, $x=3$, $y=2$ le înlocuim în ultima rezultă $m=23$).

1.436C Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = BAB^{-1}$, atunci $C^{20} = \begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20}-3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$: $C^{20} = BA^{20}B^{-1}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{20} = \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$, $C^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20}-3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$.

1.437C Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, $n \leq 15$ astfel încât $A^n = I_2$. $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_0 = I_2$, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$, $R_\theta^n = R_{n\theta}$ deci $A^n = (R_{\frac{\pi}{4}})^n = R_{n\frac{\pi}{4}}$ de unde $n=8$.

1.438C Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care $I_n + aA$ este inversabilă unde A este o matrice de ordinul n cu toate elementele egale cu 1, este $a \neq -\frac{1}{n}$. Avem $\det(I_n+aA) = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & \dots & a & a \\ a & a+1 & a & \dots & a & \\ a & a & a+1 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a & a+1 \end{vmatrix} = (na+1)$ (adunăm toate liniile la prima , dăm factor $na+1$ şi apoi scădem prima coloană din celelalte; $\det(I_n+aA) \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{n} \Rightarrow I_n + aA$ este inversabilă.

1.439C Urma S_n a matricei A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ este S_n. Dacă $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, A_1, A_2 celule pătrate, atunci $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & O \\ O & A_2^n \end{pmatrix}$ deci $A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $S_n = 2^n(1+2\cos\frac{n\pi}{3})$.

1.440C Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{R}$, şi matricele $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, relaţia $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ este incorectă: AB este o matrice pătrată $n \times n$, $AB \in M_n(\mathbf{R})$, $AB = (a_{ij} = x_i y_j)$, $BA = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n$ este un număr (matrice unidimensională) $\det A$, $\det B$ nu există pentru $n > 1$.

1.441C Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ cu $\det A = 0$. Atunci $(\exists)B \in M_n(\mathbf{R})$, $B \neq 0_n$ astfel încât $AB = 0_n$. Într-adevăr, sistemul $AB = 0_n$ cu necunoscutele coeficienţii $b_1, b_2, \dots, b_n$ ai matricei $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_n & \dots & b_n \end{pmatrix}$ este liniar, omogen, de determinant nul, deci admite soluţii nebanale.

1.442C Fie D un determinant de ordinul trei ale cărui elemente sunt 1 sau -1. Atunci $|D| = 4$. Într-adevăr, prin schimbări de linii sau coloane între ele şi prin înmulţiri cu -1 ale unor linii sau coloane $|D|$ nu se schimbă. Rămân de studiat cazurile $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ şi $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ etc.

1.443C Valoarea determinantului $D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 7 = 0$ este $D = 4$. Avem

$$D = (x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ x_3 & x_1-x_3 & x_2-x_3 \end{pmatrix} =$$

$= -2[(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)] = -2[(x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)] = -2(4-6) = 4$. Altfel $D = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3+x_2^3+x_3^3)$.

1.444C Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = B$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii atunci S suma modulelor elementelor matricei X este $S = 3$. Inversa matricei A: $\det A = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon)$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $|\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1$.

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon^2-\varepsilon \\ \varepsilon^2-\varepsilon & \varepsilon-1 & -\varepsilon^2+1 \\ \varepsilon^2-\varepsilon & -\varepsilon^2+1 & \varepsilon-1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

de unde $S = \frac{1}{3}(5+2|\varepsilon|+2|\varepsilon^2|) = 3$. Altfel, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obţin 3 sisteme cu necunoscutele liniile matricei A^{-1}.

1.445C Valoarea lui $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $\det(\lambda A) = 1$, unde A este o matrice nesingulară de ordinul n cu $\Delta = \det A > 0$ este $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta}}$. Evident $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A = 1 \Rightarrow \lambda^n = \frac{1}{\Delta}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta}}$.

1.446C Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \text{ atunci } \Delta^2 = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1^3+x_2^3+x_3^3 & x_1^4+x_2^4+x_3^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{pmatrix} = -4p^3 - 27q^2$$

deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p(x_1 + x_2 + x_3) - 3q = -3q$, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3) = 2p^2$.

1.447C Matricea $C = AB - BA$ are urma (suma elementelor de pe diagonala principală) egală cu 0 pentru $(\forall)A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Pentru simplitate luăm $n = 3$. Matricele AB şi BA au urmele $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})$ respectiv $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}) + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})$ deci $AB - BA$ are urma 0. În general urma matricei $AB - BA = Tr(AB - BA) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij}\right) = 0$$

(în $Tr\, BA$ am schimbat ordinea de sumare.

1.448C Valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ admite o infinitate de soluţii, deci pentru care $\Delta = 0$ sunt $\lambda \in \{-2, 1\}$ deoarece $\Delta = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$.

1.449C Sistemul $\begin{cases} x + y + z = c \\ ax + by + (a+b)z = 0 \\ a^2x + b^2x + (a+b)^2z = 0 \end{cases}$ cu $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$ $ab(b-a)$, pentru $a = 0$ şi $b \neq 0$ sistemul este compatibil pentru $(\forall)c \in \mathbf{R}$. Dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq a$ avem sistem Cramer (compatibil determinat, soluţie unică), dacă $b = a$ sistemul este compatibil pentru $c = 0$ (când $c \neq 0$ sistemul este incompatibil); când $b = 0$, $a \neq 0$ sistemul este compatibil, iar $a = 0$, $b \neq 0$ la fel pentru $(\forall)c$.

1.450C Sistemul

$$\begin{cases} ax + (3a+4)y + 2(a+1)z = 0 \\ ax + (4a+2)y + (a+4)z = 0 \\ 2x + (3a+4)y + 3az = 0 \end{cases} \quad \text{cu} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & 3a+4 & 2(a+1) \\ a & 4a+2 & a+4 \\ 2 & 3a+4 & 3a \end{vmatrix} =$$

$$= 6(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 3a+4 & 2(a+1) \\ 0 & a-2 & -a+2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 6(a+1)(a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1, a = 2:$$

pentru $a = -1$ sistem compatibil simplu nedeterminat (rangul matricii este 2) iar pentru $a = 2$ compatibil dublu nedeterminat (rangul matricii este 1).

1.451C Numărul n de soluţii ale sistemului $\begin{cases} |x| + |x+y| = 3 \\ 2|x| - 3|x+y| = -4 \end{cases}$ este $n = 4$. Rezultă $|x| = 1$, $|x+y| = 2$ deci $x = \pm 1$, $x + y = \pm 2$ şi avem soluţiile $(1, 1), (1, -3), (-1, 3), (-1, -1)$ deci $n = 4$.

1.452C Dacă $a,b,c \in \mathbf{R}$ şi $a2^n + b3^n + c3^n = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ atunci $a = b = c = 0$. Dăm lui n valorile 0,1,2 şi obţinem sistemul $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+3b+4c=0 \\ 2^2a+3^2b+4^2c=0 \end{cases}$ cu determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ deci avem numai soluţia banală $a = b = c = 0$.

1.453C Dacă (x,y,z) este soluţie nenulă a sistemului $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+9y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ atunci expresia $E = \frac{x+y+z}{x+y-z}$ are valoarea $E = \frac{1}{11}$. Obţinem, rezolvând în raport cu x şi z (sistemul admite şi soluţii nebanale, $\Delta = 0$), $z = 5y$, $x = -7y$ deci $E = \frac{-7y+y+5y}{-7y+y-5y} = \frac{1}{11}$.

1.5 Structuri algebrice

1.454A Familia G a matricelor de forma $A_x = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ înzestrată cu înmulţirea matricelor este un grup comutativ:

$$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & x+y-2xy \\ x+y-2xy & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix} = A_{x+y-2xy},$$

$A_0 = I_2$, A_x este inversabilă $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $(A_x)^{-1} = A_{\frac{x}{2x-1}}$, comutativitatea este evidentă, iar asociativitatea este proprietatea pe care o au matricile din $M_n(\mathbf{R})$. Deci $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

1.455A Mulţimea $[2,\infty)$ este stabilă la operaţia $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ definită pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ deoarece $t + \frac{1}{t} \geq 2$ pentru $t > 0$ $(t^2 - 2t + 1 \geq 0)$.

1.456A Dacă pe $G = (2,\infty)$ se dă legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2$ $(\forall)x,y \in G$ atunci $x \circ x \circ x \circ x = (x-2)^4 + 2$: $x \circ x = (x-2)^2+2$, $(x \circ x) \circ x = ((x-2)^2+2) \circ x = ((x-2)^2+2-2)(x-2)+2 = (x-2)^3 + 2$, $x \circ x \circ x \circ x = ((x-s)^3 + 2 - 2)(x-2) + 2 = (x-2)^4 + 2$.

1.457A Suma S a elementelor inversabile din $\mathbf{Z}$ în raport cu legea $\circ$ dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x,y \in \mathbf{Z}$ este $S = 4$: din egalitatea $x \circ e = xe - 2x - 2e + 6 = x \Rightarrow x(e-3) - 2(e-3) = 0$ rezultă că elementul neutru este $e = 3$, iar din egalitatea $x \circ x' = xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$ rezultă $x - 2 = \pm 1$, deci $x = 3$ şi $x = 1$ sunt inversabili, $S = 3 + 1 = 4$.

1.458A Fie $G = \{x,y,z,t\}$ şi legea de compoziţie definită prin tabela

$\circ$	x	y	z	t
x	y	a	b	z
y	x	y	z	t
z	c	d	y	z
t	z	e	x	f

$(G,\circ)$ este grup dacă şi numai dacă $a = x$, $d = z$, $b = e = c = t$, $f = y$. Se observă că y este elementul neutru (conform liniei lui y deci pe coloana lui y trebuie să avem $a = x$, $d = z$, $e = t$. Pe fiecare linie şi coloană orice element apare o singură dată, deci completăm tabelul $b = t$, $c = t$, $f = y$.

1.459A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax | a \in \mathbf{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin $(f * g)(x) = x(f'(x) + g'(x))$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(G,*)$ este grup comutativ: $(f * g)(x) = x(a+b) = ax + bx = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ $(g(x) = bx, b \in \mathbf{R})$ deci legea $*$ este de fapt adunarea funcţiilor de forma $f(x) = ax$, $f \in G$; funcţia nulă $f(x) = 0$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$ elementul neutru, simetrica lui f este $-f$, $-f(x) = -ax$, G este stabilă la operaţia $*$, asociativitatea şi comutativitatea sunt evidente, Deci $(G,*)$ este grup comutativ.

1.460A Pe mulţimea $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx | a,b \in \mathbf{R}\}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin $(f * g)(x) = x(f'(x) + g'(x))$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Atunci legea $*$ nu are element neutru: $f(x) = ax^2 + bx$, $e(x) = cx^2 + dx$, $(f * e)(x) = x(f'(x) + e'(x)) = x(2ax + b + cx + d) = x^2(2a + 2c) + x(b + d) = f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow 2a + 2c = a$, $b = b + d$ deci $c = -\frac{a}{2}$, $d = 0$; aceasta ar însemna că pentru fiecare f avem un element neutru (e depinde de f), absurd.

1.461A Fie G mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de două ori derivabile pe $\mathbf{R}$ care verifică $f'(x) + 2f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Pe G considerăm adunarea $h = f + g$ definită de $h(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Atunci $(G,+)$ este grup comutativ. Avem $\frac{df}{f} = -2dx$, $\ln f = -2x + \ln a \Rightarrow f(x) = ae^{-2x}$, a constant. $g(x) = be^{-2x}$, $(f+g)(x) = (a+b)e^{-2x}$, elementul neutru este funcţia 0, $f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, elementul simetric al lui f, $f' = -f$ deci $(G,+)$ este un grup comutativ .

1.462A Pe mulţimea $G = \{2,4,6,8\} \subset \mathbf{Z}$ definim legea de compoziţie prin $x * y =$ ultima cifră a produsului numerelor întregi x,y. Formăm tabela operaţiei $*$:

x	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

Observăm că elementul neutru este 6 şi simetricul lui 2 este 8, al lui 8 este 2, iar 4 şi 6 sunt propriile lor simetrice; $(G, *)$ este grup.

1.463A Valorile lui λ şi μ pentru care relaţia $x*y = 2\lambda x + \mu y + xy$ defineşte pe $\mathbf{R}$ o lege de compoziţie asociativă, comutativă şi 0 este element neutru sunt $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$: din comutativitate rezultă $\mu = 2\lambda$, iar din asociativitate avem $(2\lambda - 4\lambda^2)x + (\mu^2 - \mu)z + (\mu - 2\lambda)xz = 0$ deci $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$ şi legea devine $x * y = x + y + xy$, 0 este elementul neutru.

1.464A Legea de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ defineşte o structură de grup pe $G = (2, \infty)$ dacă $\lambda = 6$ deoarece din $x*y = (x-2)(y-2) + \lambda - 4 \Rightarrow G$ stabil la $* \Leftrightarrow \lambda = 6(\lambda - 4 = 2)$.

1.465A Pe mulţimea Q se definesc legile de compoziţie $x \circ y = \frac{1}{4}xy - 2x - 2y + 24$ şi $x*y = x+y+2$, $(\forall)x, y \in Q$, cu elementele neutre e_1 şi e_2. Atunci $e_1 * e_2 = 12$: $x \circ e_1 = \frac{1}{4}xe_1 - 2x - 2e_1 + 24 = x \Rightarrow x(\frac{e_1}{4} - 3) + 24 - 2e_1 \equiv 0$ deci $e_1 = 12$ iar $e_2 = -2$; $e_1 * e_2 = 12 * (-2) = 12 - 2 + 2 = 12$.

1.466A Numărul n de soluţii ale ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ în inelul $\mathbf{Z}_6$ este $n = 2$: $x_1 = \hat{0}$, $x_2 = \hat{3}$.

1.467A Operaţia $x * y = x + ay$, $a \in \mathbf{R}$ determină un grup abelian pe $\mathbf{R}$ pentru $a = 1$: $x * y = x + ay = y + ax = y * x \Rightarrow (x - y)(1 - a) = 0$ deci $a = 1$.

1.468A Pe mulţimea $\mathbf{C}$ definim legea de compoziţie $z * w = z + w - zw$; atunci $(\forall)z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ este simetrizabil în raport cu operaţia $*$: din egalitatea $z * e = z + e - ze = z \Rightarrow e = 0$ elementul neutru iar $z * z' = z + z' - zz' = 0 \Rightarrow z' = \frac{z}{z-1}$ deci $(\forall)z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$ este simetrizabil.

1.469A Valorile $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $(2, \infty)$ este parte stabilă la legea $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$, $x, y \in \mathbf{R}$ sunt $\lambda \in (6, \infty)$, $x * y = (x-2)(y-2) + \lambda - 4 > 2 \Rightarrow \lambda > 6$.

1.470A Soluţiile ecuaţiei $x^2 - x - \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_5$ sunt $x = \hat{3}$. $x = \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}$ nu verifică.

1.471A Din următoarele legi de compoziţie definite pe $\mathbf{R}$: 1° $x*y = |x-y|$; 2° $x*y = xy - 2(x+y)$; 3° $x*y = xy - 2x - 3y$; 4° $x*y = x + y + 1$, 5° $x*y = \sin(x+y)$; 6° $x*y = \ln(1 + |xy|)$ observăm că numai 3° este necomutativă.

1.472A Pentru orice $x \in \mathbf{Z}$ notăm cu $\hat{x}$ şi $\tilde{x}$ clasele lui x în $\mathbf{Z}_5$ respectiv în $\mathbf{Z}_3$. Să se determine numerele $x \in \mathbf{Z}$ $1 \leq x \leq 15$ astfel încât $\hat{x}^2 - 4\hat{x} + 3 = 0$, $\tilde{2}\tilde{x}^2 + \tilde{x} = 0$. Avem $\hat{x} = \hat{3}$, $\hat{x} = \hat{1}$ deci numerele 3,8,13,1,6,11 iar $\tilde{x} = \tilde{0}$, $\tilde{x} = \tilde{1}$ deci numerele 3,6,9,12,15,14,7,10,13. Intersecţia este 1,3,6,13.

1.473A In spaţiul E al polinoamelor de grad cel mult 3 care verifică $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$, polinoamele $(x-1)^2$, $x(x-1)^2$ formează o bază pentru E. Într-adevăr E este format din polinoamele de forma $P(x) = (x-1)^2(ax+b)$ ($x = 1$ este rădăcină pentru P şi pentru P' deci $P(x) = (x-1)^2(ax+b)$) deci polinoamele $(x-1)^2$ şi $x(x-1)^2$ generează pe E şi sunt liniar independente.

1.474A Numărul $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 4, \alpha)$, $v_3 = (1, 1, 5)$ să formeze o bază pentru $\mathbf{R}^3$ este $\alpha \neq 6$: combinaţia nulă $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$: $(x + 2y + z, 2x + 4y + z, 3x + \alpha y + 5z) = (0, 0, 0)$ este banală (deci $x = y = z = 0$) dacă sistemul scalar echivalent şi respectiv determinantul său Δ, $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ 3x + \alpha y + 5z = 0 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & \alpha & 5 \end{vmatrix}$ are numai soluţia banală $x = y = z = 0$ respectiv $\Delta = \alpha - 6 \neq 0$ deci $\alpha \neq 6$.

1.475A Valoarea $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care vectorii $v_1 = (1, \alpha, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (2, 5, 2)$ din $\mathbf{R}^3$ sunt liniar dependenţi este $\alpha = 2$: Combinaţia nulă $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, $(x + 2z, \alpha x + y + 5z, 2y + 2z) = (0, 0, 0)$ este nebanală, (adică nu toţi x, y, z sunt nuli) dacă sistemul scalar echivalent sî respectiv determinantul $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ \alpha x + y + 5z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ are soluţii nebanale, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ respectiv $\Delta = 4\alpha - 8 = 0$ deci $\alpha = 2$.

1.476A În $\mathbf{R}^3$ orice trei vectori liniar independenţi formează o bază (deoarece dimensiunea spaţiului este 3). Se arată uşor că generează pe $\mathbf{R}^3$: Determinantul format cu componentele celor 3 vectori este diferit de 0 şi rezultă un sistem Cramer (liniar neomogen).

1.477A Componentele vectorului $v = (0, 3, -1)$ în raport cu baza $B = \{v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$ sunt $(x, y, z) = (1, 2, -3)$: $v = (0, 3, -1) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + y + z, x + y, 2x + z) \Rightarrow x + y + z = 0, x + y = 3, 2x + z = -1$ deci $(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

1.478A Coordonatele vectorului $v = (10, 2, 7)$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, dacă $f_1 = (1, -1, 2)$, $f_2 = (2, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 0)$. Idem ca în 1.477A, $v = (10, 2, 7) = xf_1 + yf_2 + zf_3 = (x + 2y + z, -x + z, 2x + y) \Rightarrow x + 2y + z = 10, -x + z = 2, 2x + y = 7$, deci $(x, y, z) = (3, 1, 5)$.

1.479A Dimensiunea spaţiului vectorial $V = \{f : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2\}$ este 2. $B = \{f_1, f_2\}$, $f_1(\hat{0}) = \hat{1}$, $f_1(\hat{1}) = \hat{0}$, $f_2(\hat{0}) = \hat{0}$, $f_2(\hat{1}) = \hat{1}$.

1.480A O bază a spaţiului vectorial $Q(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbf{R} | x = a+b\sqrt{2}, a, b \in Q\}$ peste Q este $\{1, \sqrt{2}\}$: generează pe $Q(\sqrt{2})$ evident şi sunt liniar independenţi $x \cdot 1 + y\sqrt{2} = 0$, $x, y \in Q \Rightarrow x = y = 0$, altfel $\sqrt{2} = -\frac{x}{y} \in Q$, fals.

1.481A Un vector e_3, astfel încât sistemul $\{e_1, e_2, e_3\}$ cu $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0)$ să fie liniar independent este imposibil deoarece $e_2 = -e_1$ sunt dependenţi.

1.482B Dacă p este numărul soluţiilor în $\mathbf{Z}_{12}$ ale sistemului $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{7} \\ \hat{3}x + \hat{9}y = \hat{6} \end{cases}$ atunci $p = 3$: $\Delta = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{9} \end{vmatrix} = \hat{3}$ este divizor al lui $\hat{0}$, nu există $\hat{3}^{-1}$, nu putem aplica Cramer. Făcând tabelul înmulţirii se verifică uşor că $(\hat{3}, \hat{5})$, $(\hat{7}, \hat{1})$, $(\widehat{11}, \hat{9})$ sunt soluţii, deci $p = 3$. Altfel, înmulţim prima ecuaţiei cu $\hat{5}$, $\widehat{10}x + y = \widehat{11}$ şi înlocuim $y = \widehat{11} - \widehat{10}x$ în ecuaţia a doua, obţinem $\hat{9}x = \hat{3}$ deci $x_1 = \hat{3}$, $x_2 = \hat{7}$, $x_3 = \widehat{11}$ iar $y_1 = \hat{5}$, $y_2 = \hat{1}$, $y_3 = \hat{9}$.

1.483B Numărul k al elementelor lui $M = \{x \in \mathbf{Z}_{60} | x^3 = \hat{2}\}$. $M = \emptyset$ deoarece nici un număr $n \in \mathbf{N}$, $n \leq 60$ nu are cubul $n^3 = 2, 62, 122, 182, 242, 302, \ldots, 60k+2$, $k = 1, 2, \ldots, 59$. $n^3 = 60k + 2$ nu are soluţie: $n = 2p+1 \Rightarrow (2p+1)^3 = 60k + 2$ imposibil, par = impar; $n = 2p \Rightarrow 4p^2 = 30k + 1$ fals, impar = par.

1.484B Pe $\mathbf{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = axy + 2(x+y) + b$, $a, b \in \mathbf{Z}$ şi se cere numărul k al elementelor simetrizabile, presupunând că $(\mathbf{Z}, *)$ este monoid. Elementul neutru e rezultă din egalitatea $axe + 2(x+e) + b = x$, $(ae+1)x + 2e + b \equiv 0 \Rightarrow e = -\frac{1}{a} = -\frac{b}{2}$, $ab = 2$, deci $a = \pm 1$, $b = \pm 2$ şi rezultă două legi $x * y = xy + 2(x+y) + 2$, $x * y = -xy + 2(x+y) - 2$. Asociativitatea dă $(z - x)(ab - 2) = 0 \Rightarrow ab = 2$. Pentru prima lege cu $a = 1, b = 2, e = -1$ elementele simetrice se obţin din $xx' + 2x + 2x' + 2 = -1$, $x' = -2 + \frac{1}{x+2}$, $x + 2 = \pm 1$, $x'_1 = -3$, $x'_2 = -1$, $k = 2$.

1.485B Fie $G = (-1, 1)$ şi legea $x * y = \frac{ax+by}{1+xy}$, $(\forall) x, y \in G$. Notăm $K = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 | (G, *) \text{ este grup }\}$ şi $S = \sum_{a,b \in K} (a+b)$. Atunci $S = 2$. Elementul neutru $e : x * e = \frac{ax+be}{1+xe} = x$, $x^2 e + x(1-a) - be \equiv 0$, $1 - a = 0, e = 0, a = 1$. Asociativitate: $\frac{x+xyz-by+b^2 z}{1+yz+xy+bxz} = \frac{x+by+bz+bxyz}{1+xy+xz+byz}$ ne dă $b = 1$ deci $S = 2$.

1.486B Să se rezolve în $\mathbf{Z}_{10}$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{8} \\ x + \hat{6}y = \hat{3} \end{cases}$. Deoarece $\Delta = \hat{9}$, $\Delta x = \hat{9}$, $\Delta y = \hat{8}$, $\Delta^{-1} = \hat{9} \Rightarrow x = \hat{1}$, $y = \hat{2}$. Altfel, înlocuim $x = \hat{3} + \hat{4}y$ în prima ecuaţie, $\hat{2}(\hat{3} + \hat{4}y) + \hat{3}y = \hat{8}$, $\hat{6} + y = \hat{8}$, $y = \hat{2}$, $x = \hat{1}$.

1.487B Fie $F_k = \{f | f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bijecţie şi $f(k) = k\}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare

F_k definim legea de compoziţie $\circ$ care reprezintă compunerea obişnuită a funcţiilor. În aceste condiţii $(F_k, \circ)$ este grup pentru orice $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece f sunt bijecţii, există f^{-1} elementul simetric al lui f la compunere, aplicaţia identică este elementul neutru, iar din $(f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(k) = k$, rezultă că fiecare F_k este stabilă la compunere.

1.488B Polinomul $f = x^2 + x + m$, $m \in \mathbf{Z}_3$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$ pentru $m = \hat{2}$ deoarece $x_1 = \hat{0}$, $x_2 = \hat{1}$, $x_3 = \hat{2}$ nu sunt rădăcini pentru f.

1.489B Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbf{Z} \right\}$ şi "$\cdot$" înmulţirea matricelor. Atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}, +)$. Notăm $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi avem $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$, $A_n^{-1} = A_{-n}$, $A_0 = I_2$ deci $(G, \cdot)$ este grup abelian. Izomorfismul este dat de $h(A_n) = n$, $h(A_n \cdot A_m) = h(A_{n+m}) = m + n = h(A_n) + h(A_m)$, $\forall m, n \in \mathbf{Z}$, h este bijecţie.

1.490B Dacă G este un grup cu n elemente, $a \in G$ şi $A = \{ax | x \in G\}$ atunci A are n elemente. Într-adevăr egalitatea $ax = ay$ are loc dacă $x = y$ $(a^{-1}ax = x = a^{-1}ay = y)$ deci $x \neq y \Rightarrow ax \neq ay$.

1.491B Sistemul $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{3}y = \hat{3} \\ \hat{3}x + \hat{5}y = \hat{1} \end{cases}$ în inelul $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$ are o soluţie $x = \hat{2}$: $\Delta = \hat{6}$, $\hat{6} \cdot \hat{6} = \hat{1}$ deci $\hat{6}^{-1} = 6$ se aplică Cramer. Altfel, înmulţim prima ecuaţie cu $\hat{5}$, obţinem $x + y = \hat{1}$, $\hat{3}x + \hat{5}(1 + \hat{6}x) = \hat{1}$, $\hat{5}x = \hat{3} \Rightarrow x = \hat{2}$.

1.492B Matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sunt divizori ai lui zero în $M_2[\mathbf{R}] \Leftrightarrow a = -b, c = -d$ sau $a = c, b = d$. Trebuie satisfăcute egalităţile $AB = O_2$, $BA = O_2$ deci $AB = \begin{pmatrix} a+b & -(a+b) \\ c+d & -(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ adică $a = -b$, $c = -d$ sau $BA = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = c$ şi $b = d$.

1.493B Fie $\sigma, \gamma \in S_3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se găsească $\xi \in S_3$ astfel încât $\sigma \circ \xi = \gamma$. Avem $\xi = \sigma^{-1}\gamma$, deci trebuie calculat $\sigma^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \to 3 \to z = 1$, $2 \to 1 \to x = 2$, $3 \to 2 \to y = 3$, deci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\xi =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.494B Pe mulţimea $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se consideră legile de compoziţie $*$ şi $\circ$ definite de $x * y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$, $x \circ y = \frac{x+y}{2}$. Atunci $(I, *)$ este grup comutativ izomorf cu $(R, +)$. Legea $\circ$ nu are element neutru şi nu este asociativă: $x \circ e = \frac{x+e}{2} = x \Rightarrow e = x$ (fals), $(x \circ y) \circ z = \frac{x+y+2z}{4}$, $x \circ (y \circ z) = \frac{2x+y+z}{4}$. Elementul neutru pentru $*$ este 0, $x * 0 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, avem asociativitate: $x * (y * z) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} + \operatorname{tg}(y * z)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$, analog $(x * y) * z = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$. Simetricul lui x este $-x$, $x * (-x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} - x)) = 0$.

1.495B Câte polinoame de grad cel mult 4 sunt în inelul $\mathbf{Z}_2[x]$. Un polinom f din $\mathbf{Z}_2[x]$ se scrie $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ unde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 iau fiecare valori, $\hat{0}, \hat{1}$, deci sunt $2^5 = 32$ polinoame.

1.496B Fie $G = \{I, A, B\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $(G, \cdot)$ ($\cdot$ este operaţia de înmulţire a matricelor) este grup. Se verifică uşor că $AB = I$, $BA = I$, $A^2 = B$, $B^2 = A$, deci G este stabilă la operaţia de înmulţire, B şi A sunt simetrice una alteia, operaţia de înmulţire la matrici este asociativă, deci $(G, \cdot)$ este grup.

1.497B Elementele inversabile ale inelului $I = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cu operaţiile $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ sunt $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$: în I elementul neutru este (1,1) elementele inversabile în inelul $\mathbf{Z}$ sunt 1 şi -1 iar în I sunt perechi de elemente inversabile, deci cele menţionate (în inelul $I = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cu înmulţirea $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$, elementul neutru este (1,0), iar elementele inversabile sunt (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), cele care corespund numerelor complexe $1, i, -1, -i$).

1.498B Mulţimea matricelor $M = \{A(a), a \in 0, \infty, A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup comutativ izomorf cu $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$. Se verifică uşor că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, $(A(a))^{-1} = A(a^{-1})$, $A(1) = I_2$ deci M este grup comutativ. Izomorfismul cu $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ este dat de $h(A(a)) = a$, $h[A(a) \cdot A(b)] = h[A(a)] \cdot h[A(b)]$, h este bijecţie.

1.499B Dimensiunea spaţiului V al polinoamelor din $\mathbf{R}[x]$ care au gradul cel mult 5 şi rădăcina 4 este 5, o bază în V fiind dată de $(x-4)$, $x(x-4)$, $x^2(x-4)$, $x^3(x-4)$, $x^4(x-4)$ un polinom $f \in V$ are forma $(x-4)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)$.

1.500B O bază în spaţiul vectorial S al soluţiilor $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ a ecuaţiei $x + y - 2z = 0$ este $\{v_1 = (0, 2, 1), v_2 = (2, 0, 1)\}$. Soluţiile se scriu $(x, y, z) = (x, 2z - x, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 2, 1)$ şi notând $v_3 = (1, -1, 0)$, observăm că $v_2 = 2v_3 + v_1$, deci S este generat de $\{v_1, v_2\}$ sistem liniar independent.

1.501B Dimensiunea spaţiului vectorial al matricelor simetrice din $M_3(\mathbf{R})$ este 6, o bază fiind formată din matricele

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$.

1.502B Mulţimea N a vectorilor din $\mathbf{R}^3$ a căror imagine prin $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ este vectorul nul (nucleul lui f este $Ker f = N$) este $N = \{(x, x, x) \in \mathbf{R}^3\}$. Din $x - y, y - z = 0 \Rightarrow x = y = z$ deci $(x, x, x) \in N$.

1.503 Valorile lui $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (\alpha x + y, 2x + 3y)$ este un izomorfism liniar sunt $\alpha \neq \frac{2}{3}$; vectorii care merg în (0,0) se reduc la (0,0), deci nucleul N al lui f este $0 = (0,0)$: sistemul $\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ are numai soluţia banală, când $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2 \neq 0$, $\alpha \neq \frac{2}{3}$.

1.504B Precizaţi perechea de funcţii v, w care împreună cu $u(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ să fie vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial real al funcţiilor reale. Luăm $v(x) = xe^x$, $w(x) = e^{2x}$ şi arătăm liniar independenţa: $\alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{2x} \equiv 0 \Rightarrow (\alpha + \beta x) + \gamma e^x \equiv 0$ deci $\alpha + \beta x \equiv 0$, $\gamma = 0$ (altfel $e^x = \frac{-\alpha - \beta x}{\gamma}$ fals) de unde $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.505B Dimensiunea subspaţiului vectorial $P = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ este 2: $P = \{(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)\}$, deci P este generat de vectorii liniar independenţi $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$.

1.506B Numărul maxim de vectori liniar independenţi în mulţimea soluţiilor sistemului $\begin{cases} x - y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + y - 3z + t = 0 \end{cases}$ este 2. Soluţiile se scriu $(x, y, z, t) = (\frac{1}{3}z - \frac{5}{3}t, \frac{7}{3}z + \frac{7}{3}t, z, t) = z(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 1, 0) + t(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 0, 1)$ deci vectorii $v_1(1, 7, 3, 0)$, $v_2 = (-5, 7, 0, 3)$ generează spaţiul soluţiilor, sunt independenţi, dimensiunea spaţiului este 2 deci numărul maxim de soluţii liniar independente este 2.

1.508C Pe mulţimea $R_1[x]$ a polinoamelor de grad ≤ 1 cu coeficienţi reali

definim operaţiile "+" şi "$*$" astfel: $f = ax + b$, $g = cx + d \Rightarrow f + g = h = (a+c)x+b+d$, $f*g = (ad+bc-ac)x+bd-ac$. Atunci $(R_1[x], +, *)$ este corp sî inversul lui $x+1$ este $-x$. ($R_1[x]$ este izomorf cu $\mathbf{R}^2$ deci problema se reduce la $\mathbf{R}^2$ înzestrat cu operaţiile $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b)*(c,d) = (ad+bc-ac, bd-ac)$. Se verifică uşor că $\mathbf{R}^2$ cu operaţia $*$ este corp şi că inversul lui (1,1) este (0,-1).

1.509C În $M_2(\mathbf{Z}_5)$ ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$ are două soluţii. Notând $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & (x+t)y \\ (x+t)z & t^2+yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$ se obţin ecuaţiile 1° $x^2+yz = \hat{3}$; 2° $t^2+yz = \hat{3}$; 3° $(x+t)y = \hat{2}$; 4° $(x+t)z = \hat{4}$ etc. Trebuiesc verificate toate variantele.

Putem avea numai $x^2 = t^2 = \hat{0}, \hat{1}, \hat{4}$ în 1°, 2°. Dar $x^2 = t^2 = 0$ nu verifică 3°, 4°. $x^2 = t^2 = \hat{1}$, $yz = \hat{2}$ ne dă soluţia $x = t = y = \hat{1}$, $z = \hat{2}$.

1.510C Se consideră pe $\mathbf{R}$ legile de compoziţie $x \oplus y = mx + ny - 1$, $x \odot y = 2xy - 2x - 2y + p$. Să se determine m, n, p astfel încât $(\mathbf{R}, \oplus, \odot)$ să fie corp. Elementele neutre e_1, e_2 la $\oplus$ şi $\odot$: $x \oplus e_1 = mx + ne_1 - 1 = x \Rightarrow m = 1$, $e_1 = \frac{1}{n}$, $2xe_2 - 2x - 2e_2 + p = x$, $x(2e_2 - 3) - 2e_2 + p \equiv 0 \Rightarrow e_2 = \frac{3}{2} = \frac{p}{2}$ deci $p = 3$. Din comutativitatea operaţiei $\oplus$ rezultă $mx + ny - 1 = my + nx - 1 \Rightarrow m = n = 1 = e_1$.

1.511C Fie $G = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbf{Z}_8$, $H = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\} \subset \mathbf{Z}_{12}$ familiile elementelor inversabile din inelele $\mathbf{Z}_8$, $\mathbf{Z}_{12}$. Atunci G, H sunt grupuri relativ la înmulţirea claselor, sunt izomorfe şi izomorfe cu grupul lui Klein. Conform tablelor operaţiilor, sunt stabile, elementele sunt idempotente $x^2 = \hat{1}$, $xy = z$, $\forall x, y, z$ $x \neq y \neq z \neq \hat{1}$. Tablourile operaţiilor sunt la fel structurate ca la grupul lui Klein.

1.512C Inelul M al matricelor pătrate de ordinul doi cu elemente în inelul claselor de resturi modulo 2, $M_2(\mathbf{Z}_2)$ are $4^2 = 2^4 = 16$ elemente: $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ deci câte grupe ordonate de câte patru elemente $\hat{0}$ şi $\hat{1}$ (cuvinte de 4 biţi), deci $4^2 = 16$.

1.513C Elementul simetric al unui element x relativ la legea $x*y = \sqrt[n]{y^{\log_n x}}$ $(\forall)x, y \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pentru $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ fixat este $x' = n^{\log_x n}$. Avem $x * y = y^{\log_n \sqrt[n]{x}}$. Elementul neutru e : $x * e = x = e^{\log_n \sqrt[n]{x}} \Rightarrow \log_n x = \log_n \sqrt[n]{x} \cdot \log_n e$, $\log_n x[\log_n \sqrt[n]{e} - 1] = 0$, $e = n^n$; simetricele: $x * x' = (x')^{\log_n \sqrt[n]{x}} = n^n$, $x' = n^{n^2 \log_x n}$.

1.514C Fie $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$, $x * y = x^{\ln y}$ o lege de compoziţie pe G. Atunci $(G, *)$ este grup abelian $x * y = e^{\ln(x^{\ln y})} = e^{\ln x \ln y}$, element neutru numărul e, imetricul x' al lui x, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.515C Fie K şi L două corpuri comutative şi $f : K \to L$ un morfism de inele. Atunci f este injectivă. Un morfism de corpuri de la K la L este prin definiţie un morfism de inele $f : K \to L$ (deci $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x)f(y)$ şi $f(1) = 1'$, $1 \in K$, $1' \in L$ elemente neutre respectiv în K şi L la înmulţire. Rezultă $f(0) = 0'$, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in K$. Orice morfism de corpuri este injectiv [15]: fie $x_1, x_2 \in K$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x = x_1 - x_2$; presupunem $x \neq 0$ deci există x^{-1} : $f(x) = f(x_1) - f(x_2) = 0'$, $1' = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0'f(x^{-1}) = 0'$ contradicţie, $1' \neq 0'$.

1.516C Fie $(G, \cdot)$ un grup arbitrar şi fie H şi K două submulţimi în G; dacă G este finită, atunci H este subgrup $\Leftrightarrow$ H este stabilă la operaţia: Într-adevăr, fie $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; atunci $\{a_1^2, a_1a_2, a_1a_3 \ldots a_1a_n\} = H$, deci există $s \in \{1, 2, 3, \ldots, n)$ astfel încât $a_1a_j = a_1$ rezultă că elementul neutru este a_j şi deci aparţine lui H. Analog se arată că orice element din H are simetricul în H.

1.517C Mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$ formează, relativ la înmulţirea matricelor, un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbf{R}^*$. Atunci $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$. Putem scrie $M(x) = I_2 + (1-x)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ şi aplicăm formula lui Newton $(A+B)^n$ pentru matrici. Mai uşor, direct $M(2) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = I_2 + B$ iar $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$, $B^k = B$ deci $A^5 = I_2 + 5B + 10B^2 + 10B^3 + 5B^4 + B^5 = I_2 + 31B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 31\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix} = (M(2))^5$.

1.518C Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbf{Z}_3$ polinomul $f(x) = \hat{2}x^3 + (a+\hat{1})x + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[x]$ este ireductibil în $\mathbf{Z}_3[x]$? Calculăm $f(\hat{0}) = \hat{1}$, $f(\hat{1}) = a + \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{2}a$, deci $a \neq \hat{1}$ şi rămâne $a = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1} \neq \hat{0}$, f este ireductibil pentru $a = \hat{2}$.

1.519C Dintre aplicaţiile $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de mai jos: a) $f(x,y) = x + y^2$; b) $f(x,y) = -x - |y|$; c) $f(x,y) = |x+y|$; d) $f(x,y) = -2x$; e) $f(x,y) = xy$; f) $f(x,y) = x + y - 1$ singura aplicaţie liniară este d): $f(a(x,y) + b(x,y)) = f(ax + bx_1, ay + by_1) = -2(ax + bx_1) = a(-2x) + b(-2x_1) = af(x,y) + bf(x_1,y)$.

1.520C Perechile $(m,n) \in \mathbf{R}^2$ pentru care aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (mx + y, 2x + ny)$ verifică egalitatea $f \circ f = 3f$ sunt $(m,n) = (1,2)$ sau $(m,n) = (2,1)$. Egalitatea se scrie $(f \circ f)(x,y) = f(mx + y, 2x + ny) = (m(mx + y) + 2x + ny, 2(mx + y) + n(2x + ny)) = ((m^2 + 2)x + (m + n)y, 2(m+n)x + (2+n^2)y) = (3mx + 3y, 6x + 3ny) \Rightarrow m^2 + 2 = 3m$, $m + n = 3$, $2(m + n) = 6$, $2 + n^2 = 3n$ deci $(m,n) = (1,2)$, $(m,n) = (2,1)$. Altfel, se poate folosi matricea lui f în baza canonică: $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ are matricea $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iar $f \circ f = 3f \Rightarrow A_f^2 = 3A_f$ etc.

1.521C Matricea A_f asociată aplicaţiei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (2x + y, 7x - 3y)$ este $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$: $f(x,y) = x(2,7) + y(1,-3)$, $f(e_1) = f(1,0) = (2,7) = 2e_1 + 7e_2$, $f(e_2) = (1,-3) = 1 \cdot e_1 - 3e_2$ deci coloanele matricei A_f sunt coordonatele transformatelor prin f ale vectorilor bazei canonice (e_1, e_2) în raport cu această bază, $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1.522C Aplicaţia $h = g \circ f - f \circ g$ unde $f(x,y) = (2x + y, x - y)$, $g(x,y) = (y,x)$ este dată de egalitatea $h(x,y) = 3(-y,x)$: $(g \circ f)(x,y) = g(2x + y, x - y) = (x - y, 2x + y)$, $(f \circ g)(x,y) = f(y,x) = (2y + x, y - x)$, $(g \circ f - f \circ g)(x,y) = 3(-y,x)$. Altfel matriceal $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{g\circ f - f\circ g} = A_g \cdot A_f - A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, deci $h(x,y) = (0x - 3y, 3x + 0y) = 3(-y,x)$.

1.523C Se consideră în planul $P = \mathbf{R}^2$ un sistem ortogonal xOy şi dreapta $D : x - 2y = 0$. Pentru orice punct $M \in P$ se notează cu M' proiecţia lui M pe D. Să se determine matricea asociată aplicaţiei liniare $F : P \to P$, $F(M) = M'$, relativ la baza canonică din $\mathbf{R}^2$. Fixăm $M(x_0, y_0)$ şi intersectăm dreapta $D : y = \frac{1}{2}x$ cu dreapta d prin M perpendiculară pe D, $y - y_0 = -2(x - x_0)$ şi obţinem M' de coordonate $x' = \frac{2}{5}(2x_0 + y_0)$, $y' = \frac{1}{5}(2x_0 + y_0)$ deci aplicaţia F este dată de $F(x,y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y, \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$ cu matricea $A_F = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.524C Perechea de numere $(p,q) \in \mathbf{R}^2$ astfel încât $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a cărei matrice asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ verifică relaţia $f \circ f = pf + qI$ (I = aplicaţia canonică) este $(p,q) = (-2,7)$. Matriceal avem $A_{f\circ f} = A_{pf+qI}$, $A_f^2 = pA_f + qI_2$ sau $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q & 2p \\ 2p & -3p+q \end{pmatrix} \Rightarrow 2p = -4$, $p = -2$, $p + q = 5$, $q = 7$. Altfel, se scrie $f(x,y) = (x + 2y, 2x - 3y)$, $(f \circ f)(x,y) = pf(x,y) + q(x,y)$ şi se obţine un sistem din ecuaţia $(f \circ f)(x,y) = (5x - 4y, -4x + 13y) = p(x + 2y, 2x - 3y) + q(x,y)$.

Capitolul 2

Analiză matematică

2.1 Numere reale. Progresii. Siruri

2.525A Şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dat de $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, $x_0=1$ se scrie $x_{n+1}-1=(x_n-1)^2$ deci este şirul constant $1,1,1,1,\ldots$, $x_n=1$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.
2.526A Şirul $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ este periodic cu perioada 8 şi ia valorile $0,\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}$ admite cinci subşiruri convergente, este corect f).
2.527A Dacă progresia aritmetică are $a_1=23$, $a_n=5$, $r=-2$, cât este n?. $a_n=a_1+(n-1)r$, $5=23+(n-1)(-2)$, $2(n-1)=18$, $n=10$.
2.528A Dacă progresia aritmetică are $a_1=3$, $a_n=39$, $S_n=210$, cât este r şi n? $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, $210=\frac{(3+39)n}{2}$, $n=10$, $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}n$, $210=\frac{2\cdot3+9r}{2}10\Rightarrow r=4$.
2.529A Idem ca în 2.528A, $a_1\geq0$, $a_n=18$, $r=2$, $S_n=88$ se cere a_1 şi n. Înlocuim în formulele $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$, $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}n$ şi obţinem sistemul $(a_1+18)n=176$, $(a_1+n-1)n=88$ cu soluţia $a_1=4$, $n=8$.
2.530A Idem 2.529A, pentru $n\geq5$, $a_2+a_4=16$, $a_1\cdot a_5=28$ să se determine a_1 şi r : $a_2=a_1+r$, $a_4=a_1+3r$, $a_5=a_1+4r\Rightarrow a_1+r+a_1+3r=16$, $a_1(a_1+4r)=28$, $2r=8-a_1$, $a_1^2+2a_1(8-a_1)=28\Rightarrow a_1=2$, $r=3$.
2.531A Dacă $a_1,a_2,\ldots,a_n$ este o progresie geometrică şi $a_1=5$, $a_n=1280$ şi $n=9$ cât este suma S_n : $a_n=a_1r^{n-1}$, $5\cdot r^8=1280\Rightarrow r=-2$. $S_n=a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$, $S_9=855$.
2.532A Idem 2.531A, unde $a_n>0$, $n=3$, $a_3-a_1=136$, $S_n=221$ şi se cere a_n : $a_3=a_1r^2$, $S_3=a_1\frac{r^3-1}{r-1}$, $a_3-a_1=a_1(r^2-1)=136$, $S_3=a_1(r^2+r+1)$, $\frac{a_1(r^2+r+1)}{a_1(r^2-1)}=\frac{221}{136}=\frac{13}{8}\Rightarrow r=3,a_1=17,a_3=153$.
2.533A Idem 2.531A unde $a_1+a_2+a_3=26$, $a_5+a_6+a_7=2106$ şi se cere a_7 : $a_1+a_1r+a_1r^2=26$, $a_1r^4+a_1r^5+a_2r^6=2106$, $r^4(a_1+a_1r+a_1r^2)=2106$,

$r^4 \cdot 26 = 2106$, $r^4 = 81$, $r = 3$, $a_1 = 2$, $a_3 = 1458$.

2.534A Termenul general al şirului $\frac{2}{1\cdot3}, \frac{4}{3\cdot5}, \frac{6}{5\cdot7}, \frac{8}{7\cdot9} \ldots$ definit pentru $n \geq 1$ este $\frac{2n}{2n^2-1} = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

2.535A Termenul general al şirului $0, -\frac{1}{9}, \frac{4}{16}, -\frac{9}{25}, \frac{16}{36} \ldots$ definit pentru $n \geq 1$ este $(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$.

2.536A Termenul general al şirului $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5} \ldots$ definit pentru $n \geq 1$ este $\frac{n^2+1}{n}$.

2.537A Deoarece $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$, $C_n^1 + C_n^2 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$ şirul $a_n = \frac{C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots}{C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1$ este constant.

2.538A Şirul $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ este periodic de perioadă 4 şi ia trei valori $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ este deci format din trei subşiruri convergente la limite diferite.

2.539A Şirul $a_n = \min(n, 10)$ se scrie $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 10, 10, \ldots, 10, \ldots$ este deci convergent, $a_n \to 10$.

2.540A Se consideră mulţimea $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4\}$ şi se cere $\max A$ şi $\min A$. Reprezentând pe cercul trigonometric radianii $1, 2, 3, 4$ se observă că sunt apropiate ca valori (dar mai mici) de $\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}, 3\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}$ de unde rezultă că $\sin 2 > \sin 1 > 0$, $\sin 4 < 0 < \sin 3$, deci $\max A = \sin 2$, $\min A = \sin 4$.

2.541A Valorile lui $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{10}$ sunt: $\frac{1}{2(2n+3)} > \frac{1}{10}$, $4n + 6 < 10$, $n < 1$ deci $n = 0$.

2.542A Să se calculeze $\max A$ pentru $A = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$. Pentru $n = 1$, avem evident $\max A = 2$, deoarece $\frac{n+1}{n} < 2$ pentru $n > 1$.

2.543A Dacă $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt erorile absolute în aproximările $\pi^2 \simeq 10$ şi respectiv $e^3 \simeq 20$, să se evalueze $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Deoarece $\varepsilon_1 = |\pi^2 - 10|$, $e_2 = |e^2 - 20|$ luând $\pi \simeq 3,1416$, $e \simeq 2,7183$, rezultă $\varepsilon_1 < \frac{1}{5}$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{5}$.

2.544A Fie şirul recurent $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ cu $u_0 \neq 3$. Dacă $(u_n + \alpha)_n$ este o progresie geometrică, să se determine valoarea lui α. Condiţia dată se scrie $(u_n + \alpha)^2 = (u_{n-1} + \alpha)(u_{n+1} + \alpha)$, unde $u_{n-1} = 3(u_n - 2)$ iar $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ deci $u_n^2 + 2\alpha u_n = \alpha(u_{n-1} + u_{n+1}) + u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ sau $u_n^2 + 2\alpha u_n = \alpha\left[3(u_n - 2) + \frac{1}{3}u_n + 2\right] + \left[3(u_n - 2)\left(\frac{1}{3}u_n + 2\right)\right]$. Rezultă $\left(\frac{\alpha}{3} + 1\right)u_n - (\alpha + 3) = 0$ deci $\alpha = -3$.

2.545A Şirurile $(a_n), (b_n), (c_n)$ definite prin $a_n = 2001 - 667n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$ şi $c_n = (-1)^n + n$ verifică $a_{n+1} - a_n = -667$, $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$, (a_n) este progresie aritmetică, (b_n) este progresie geometrică iar (c_n) nu este progresie.

2.546A Termenul general al şirului definit de $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$, $a_1 = 1$ se obţine scriind egalitatea $a_{k+1} = a_k - \frac{1}{k(k+1)}$ pentru $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi se adună. Rezultă $a_n = a_1 - \left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{n}$.

2.547A Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 > 9\} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ este formată din $A \cup \{-3, 3\}$ deci o infinitate.

2.548A Domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$ este evident $D = [1, \infty)$ deoarece $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 3)^2} = |\sqrt{x-1} - 3|$.

2.549A $\max A$, dacă $A = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5\}$ este $\cos 1$. Procedăm ca pentru 2.516A, figurând radianii 1,2,3,4,5 pe cercul trigonometric.

2.550A Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă orice subşir al său este convergent.

2.551A Valorile lui t pentru care şirul $f_n(t) = t^n e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$ este o progresie aritmetică: $2f_n(t) = f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t)$, $2t^n = t^{n-1} + t^{n+1}$; $t = 0$ şi $t = 1$. Se obţin progresiile $0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \ldots, \frac{1}{e}, \ldots$.

2.552A Suma termenilor progresiei geometrice $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{10}}$ este $S_{11} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{11}-1}{2^{10}}$.

2.553A Fie $q \in \mathbf{R}$, $a_n = q^n$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Şirul a_n este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$ sau $q = 1$. $b_n = q\frac{1-q^n}{1-q}$ este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$.

2.554B Dacă (a_n) este o progresie aritmetică şi $a_1 + a_5 + a_9 = 51$ aflaţi $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_8 \cdot a_1 + (a_1 + 4r) + (a_1 + 8r) = 51$, $a_1 + 4r = 17$ de unde $S = (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 7r) = 4(a_1 + 4r) = 4 \cdot 17 = 68$.

2.555B Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ este o progresie aritmetică în care $a_{11} = 15$ calculaţi $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{21}$. $a_{11} = a_1 + 10r = 15$, $S = a_1 + (a_1 + r) + \ldots + (a_1 + 20r) = 21a_1 + r(1 + 2 + \ldots + 20) = 21(a_1 + 10r) = 315$.

2.556B Orice şir crescător şi mărginit este convergent.

2.557B Determinaţi mulţimea A a punctelor de acumulare ale mulţimii $B = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbf{N}\right\}$. Mulţimea $C = \left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ este un şir periodic, de perioada 8, cu cinci valori $A = \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$ iar mulţimea B este un şir cu cinci puncte de acumulare (puncte limită) tocmai mulţimea A.

2.558B Mulţimea $B = \{x_n = \cos\frac{n\pi}{6}, n \in \mathbf{N}\}$ este un şir periodic cu perioada 12 cu valorile succesive $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, deci $m = \min B = -1$, $M = \max B = 1$.

2.559B Fie (x_n) un şir fixat. x_n este convergent dacă şi numai dacă x_{2n}, x_{2n+1}, x_{3n} sunt convergente: $x_{2n} \cap x_{3n}$ şi $x_{2n+1} \cap x_{3n}$ au amândouă aceiaşi limită cu x_{3n} şi aceiaşi limită cu x_{2n} şi x_{2n+1}.

2.560B Dacă suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

este cât o treime din suma următorilor n termeni, să se calculeze $\frac{S_{3n}}{S_n}$: $\frac{S_{2n}-S_n}{3} = S_n$, $S_{2n} = 4S_n$, $S_n = na_1 + r\frac{(n-1)n}{2}$, $S_{2n} = 2na_1 + r\frac{(2n-1)2n}{2} \Rightarrow r = 2a_1$, $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{6na_1+2a_1(3n-1)3n}{2na_1+2a_1(n-1)n} = 3\frac{3n^2}{n^2} = 9$.

2.561B Tripletele (x, y, z) care verifică sistemul $x+y+z = 3$, $x^2+y^2+z^2 = 3$. Avem $2(x^2+y^2+z^2) = 2(x+y+z) \Rightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 0$, $x = y = z = 1$. Geometric, planul este tangent la sferă în punctul (1,1,1), distanţa de la (0,0,0) la plan este egală cu raza sferei $\sqrt{3}$. Altfel, eliminăm z între cele două egalităţi, $z = 3-(x+y)$, $x^2+y^2-3x-3y+3 = 0$, $y^2+y(x-3)+x^2-3x+3 = 0$. $y_{1,2} = \frac{3-x\pm\sqrt{(3-x)^2-4(x^2-3x+3)}}{2} = \frac{3-x\pm\sqrt{-3(x-1)^2}}{2}$ deci $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

2.562B Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ crescător $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f crescătoare, g descrescătoare. Cum sunt $b_n = f(a_n)$, $c_n = g(a_n)$, $n \in \mathbf{N}$?. Funcţiile crescătoare păstrează inegalităţile, funcţiile descrescătoare inversează inegalităţile, deci $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow b_n = f(a_n) < f(a_{n+1}) = b_{n+1}$, $c_n = f(a_n)$, $f(a_{n+1}) = c_{n+1}$, deci b_n este crescător iar c_n descrescător.

2.563B Fie o progresie geometrică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_5 = 61$, $a_{11} = 1647$; să se afle a_7 : $a_5 = a_1r^4$, $a_{11} = a_1r^{10}$, $a_1r^4 = 61$, $a_1r^{10} = 1647$, $r^6 = \frac{1647}{61} = 27$, $r = \sqrt{3}$, $a_1 = \frac{61}{9}$, $a_7 = a_1r^6 = \frac{61}{9}\cdot 27 = 183$.

2.564B Domeniul de definiţie al expresiei $E(x) = (\ln x)^{\ln x}$ este $(1,\infty) \cup \{e^{-\frac{n}{m}}\}$, m impar, deci un şir şi un interval.

2.565B Punctele de acumulare al mulţimii $(\{(-1)^n\frac{n+1}{3n}\}$, $n \in \mathbf{N})$ sunt $+\frac{1}{3}$ şi $-\frac{1}{3}$ deoarece $(-1)^n\frac{n+1}{3n} = (-1)^n\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3n} \to \pm\frac{1}{3}$.

2.566B Progresia aritmetică cu termeni pozitivi are primul termen pe a_1 şi raţia r pozitive şi din $a_{n+1} = a_n + r > a_n$ rezultă că (a_n) este un şir monoton crescător.

2.567C $x_n = \frac{\sin n!}{1+4^n} \to 0$ deoarece $0 \le \left|\frac{\sin n!}{1+4^n}\right| \le \frac{1}{1+4^n} \to 0$.

2.568C Fie $f : \bar{\mathbf{R}} \to [-1,1]$ definită prin $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = -1$. Făcând graficul, se observă că f este bijectivă, este impară, crescătoare $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f^{-1}(-1) = -\infty$, $f^{-1}(1) = +\infty$. Expresia lui f^{-1} se determină rezolvând în raport cu x pe $y = \frac{x}{1+x}$ $(x > 0)$, $y = \frac{x}{1-x}$ $(x < 0)$ şi schimbând rolul variabilei pe y cu x.

2.569C Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ un şir, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mărginită pe $\mathbf{R}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotonă pe $\mathbf{R}$. Cum sunt şirurile $b_n = (f \circ g)(a_n)$, $c_n = (g \circ f)(a_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Deoarece f este mărginită pe $\mathbf{R}$, $f(a_n)$ şi $f(g(a_n))$ sunt şiruri mărginite, deci şi $g(f(a_n))$ este mărginit.

2.570C Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n}$, $x \in (0,1)$. $nx-1 < [nx] \le nx$, $\frac{nx-1}{n} \le \frac{[nx]}{n} < \frac{nx}{n}$,

$x - \frac{1}{n} \le \frac{[nx]}{n} < x$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n} = x$.

2.571C Aflaţi a_n dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Ecuaţia caracteristică asociată şirului $r^2 - 5r + 6 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ deci $a_n = A2^n + B3^n$. Punem condiţiile $a_1 = 1$ şi $a_2 = 4$ şi rezultă $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$, $a_n = \frac{2}{3}3^n - \frac{1}{2}2^n = 183^{n-3} - 2^{n-1}$.

2.572C Termenul general al şirului $2, 4, 7, 11, \ldots$ care are proprietatea că diferenţele între termenii consecutivi formează o progresie aritmetică este $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$. Se verifică grila direct. Altfel, scriem condiţia dată:

$$2(a_{n+1}-a_n) = (a_n-a_{n-1})+(a_{n+2}-a_{n+1}) \Rightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}+3a_n-a_{n-1} = 0$$

şir recurent cu ecuaţia caracteristică $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, $(r-1)^3 = 0$ care ne dă $a_n = A + Bn + Cn^2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Rezultă $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$ din sistemul $A+B+C = 2$, $A+2B+4C = 4$, $A+3B+9C = 7$.

2.573C Marginea superioară M şi inferioară m a mulţimii $\{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1} | x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}\}$. Evident $M = +\infty$ (pentru $x \to -1$). Pentru m scriem condiţia ca ecuaţia $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1} = y$ în x cu coeficienţi în y (y parametru) să aibă rădăcini reale deci $\Delta_y \ge 0$: $x^2(1-y)-x(3+2y)+2-y = 0$, $\Delta_y = (3+2y)^2-4(1-y)(2-y) \ge 0$, $\Delta_y = 1+24y \ge 0$, $y \ge -\frac{1}{24}$ deci $m = -\frac{1}{24}$. Altfel, facem graficul.

2.574C Fie şirurile $x_n = (a+(n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ $(a, r, q \in \mathbf{R}, q \ne 1)$.

Se cere y_n : $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(a+(k-1)r)q^{k-1} = a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}q^{k-1} + r\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)q^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q} + Sr$, $S = q+2q^2+3q^3+\ldots+(n-1)q^{n-1}$. $S-qS = q+q^2+q^3+q^4\ldots+q^{n-1}-(n-1)q^n = q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}-(n-1)q^n = \frac{q}{1-q}[1-q^{n-1}-(n-1)(q^{n-1}-q^n)] = \frac{q}{1-q}[(n-1)q^n - nq^{n-1}]$ deci $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$.

2.2 Limite

2.575C $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} \to 1$.

2.576A $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+3+\ldots+n)^2}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}=1.$

2.577A Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{a}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt[n]{a}-1)-n(\sqrt[n]{b}-1)}{n(\sqrt[n]{c}-1)-n(\sqrt[n]{d}-1)}=\dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}=\dfrac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$, $(a,b,c,d>0)$.

2.578A $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ $(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1)$.

2.579A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}-\sqrt{n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}+\sqrt{\frac{1}{n^7}}}}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$

2.580A $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arcsin\frac{1}{n^2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\arcsin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}-\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)=0.$

2.581A $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-7n+13}}{\sqrt[3]{-n^3+2n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt{1-\frac{7}{n}+\frac{13}{n^2}}}{-n\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)}=-1.$

2.582A $\lim\limits_{n\to\infty}\log_8\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3-2}}{n+1}\right)^{\frac{\sqrt[3]{-n^2-n+1}}{x+\sqrt[4]{n^4-1}}}=$

$=\log_8\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\sqrt[3]{-1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}}=\log_8 2^{-1/2}=-\frac{1}{6}.$

2.583A $\lim\limits_{n\uparrow3}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-3}}}=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{3-t-3}}}=\dfrac{1}{1+2^{-\infty}}=1.$

2.584A $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x^2-1}}=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}e^{\frac{1}{(1\mp t)^2-1}}=e^{\mp\infty}=\begin{cases}l_s=0\\l_d=\infty\end{cases}$

2.585A $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^n+5^n+7^n}{2^n+4^n+6^n+8^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot\frac{\frac{1}{7^n}+\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=0.$

2.586A $l=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2-\sqrt{n^2+n+3})=2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n^2+n+3)}{n+\sqrt{n^2+n+3}}=$

$2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(-1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

2.587A $l=\lim\limits_{n\to1}\dfrac{x^n+x^{n-1}-2}{x-1}=\lim\limits_{n\to1}\left(\dfrac{x^n-1}{x-1}-\dfrac{x^{n-1}-1}{x-1}\right)=n+(n-1)=$

$2n-1$, $(\lim\limits_{n\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{n\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)=n)$.

2.588A $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos^2\dfrac{\pi x}{3}=0\cdot M=0$, (dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ şi $|g(x)|<M\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$).

2.589A Pentru $x_n=(\sqrt3+\sqrt2)^n+(\sqrt3-\sqrt2)^n$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt3+\sqrt2)^{n+1}+(\sqrt3-\sqrt2)^{n+1}}{(\sqrt3+\sqrt2)^n+(\sqrt3-\sqrt2)^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt3+\sqrt2+\left(\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt3+\sqrt2}}{1+\left(\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}\right)^n}=\sqrt3+\sqrt2.$

2.590A Fie $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$, $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(2\sqrt{k})$ şi $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n:a=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-2k}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}=\dfrac{e^2}{e^2-1}$ $(1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x})$.

2.591A $l=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$

2.592A $a_n=a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)\to a.$

2.593A Şirul recurent $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$, $a_0=\sqrt3$ este crescător şi mărginit: $a_0=\sqrt3<\sqrt{3+2\sqrt3}=a_1$, $a_{n-1}<a_n\Rightarrow2a_{n-1}<2a_n$, $3+2a_{n-1}<3+2a_n$, $a_n=\sqrt{3+2a_{n-1}}<\sqrt{3+2a_n}=a_{n+1}$; mărginirea: $a_{n+1}^2=3+2a_n$, $a_{n+1}=\frac{3}{a_{n+1}}+2\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{3}{a_0}+2=\sqrt3+2$. Deci a_n are limită, $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}^2=l^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+2a_n)=3+2l$ de unde $l=3$.

2.594A $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{x^2+x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

2.595A Printre şirurile: a) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{2}$; b) $a_n=(-1)^n+1$; c) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; d) $a_n=\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{n}$; e) $a_n=\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\right)^n$; f) $a_n=\frac{1-n}{n}$ numai c), $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ verifică $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$, deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\to0$.

2.596A $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2-(x^2-3x)-(x^2-9)}{x^3-3x^2-(x^2-9)-(3x-9)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=\frac{4}{5}$.

2.597A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cdot e^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n}{x}}\right]^{-x}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-x}\cdot e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$.

2.598A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\sin nx}{x^2}=\lim\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin nx}{nx}n=n$.

2.599A Care din următoarele limite este cea corectă: a) $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=\infty\neq-\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}x\cos x$ nu există, c) $\lim\limits_{n\to 2}\frac{(2x-2)-x}{2x-4}=\lim\limits_{n\to 2}\frac{x-2}{2(x-2)}=\frac{1}{2}$ deci adevărată; d) $\lim\limits_{n\downarrow 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0\neq\infty$; e) $\lim\limits_{n\to 0}\frac{3x-5}{x+5}=-1\pm 3$;

2.600A $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$ ($\lim\limits_{n\to x_0}f(x)g(x)=0$ dacă $\lim\limits_{n\to 0}f(x)=0$ şi $|g(x)|<M$).

2.601A Limita lui $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-an$ este finită dacă $a=1$ ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-a\right)=\infty\cdot 0$ dacă $a=1$), deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

2.602A Utilizând rezultatul $\lim\limits_{n\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{m}$ rezultă că $l=$

$=\lim\limits_{n\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{n\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\cdots\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n!}$.

2.603B $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\frac{1+x}{x}\right)=\lim\limits_{0<\frac{1}{x}=t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}$.

2.604B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^2-3\pi^x}{e^x+2\pi^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{e}{\pi}\right)^x-3}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^x+2}=-\frac{3}{2}\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^x\to 0,\frac{e}{\pi}<1\right)$.

2.605B $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax+x^2)}{\sqrt{x+b}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(ax+x^2)]}{ax+x^2}\cdot\frac{ax+x^2}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x+b}+1)x}{x+b-1}$

$=2$; utilizăm $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ şi rezultă $b=1$, $2a=2$ deci $a=1$.

2.606B $l=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{e^{\sin x}-e^{tgx}}{e^{\sin 2x}-e^{tg2x}}=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{e^{tgx}(e^{\sin x-tgx}-1)}{\sin x-tgx}\cdot\frac{\sin x-tgx}{\sin 2x-tg2x}\cdot$

$\cdot\frac{\sin 2x-tg2x}{e^{tg2x}(e^{\sin x-tg2x}-1)}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}=\frac{1}{4}$.

2.607B $\lim\limits_{x\to\infty}n^\alpha(\sqrt[3]{n^3+bn+1}-n)=1\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty}n^\alpha\cdot\frac{bn+1}{\sqrt[3]{(n^3+bn+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+bn+1)n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}(b+\frac{1}{n})}{n^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^3}}+1\right)}=\frac{b}{3}=1$, dacă

$\alpha=1$, $b=3$, $\alpha+b=4$.

2.608B $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a+a^2-a^3+\dots+(-a)^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1-b^{n+1}}$; dacă $|a|<1$, $|b|<1$, $(-a)^{n+1}\to 0$, $b^{n+1}\to 0$ deci $l=\frac{1-b}{1+a}>1\Rightarrow a+b<0$.

2.609B Dacă $l=\lim\limits_{n\downarrow 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\ln(e-x)}}$ atunci $l=\lim\limits_{n\downarrow 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\ln e-\ln(e-x)}}$

$=\lim\limits_{n\downarrow 0}\sqrt{\frac{\frac{x}{e-x}}{\ln\left(1+\frac{x}{e-x}\right)}\cdot(e-x)}=\sqrt{e}$ ($\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=1,\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$).

2.610B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)}{\ln x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{\ln x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=-1$.

2.611B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\pi}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}}=1$.

2.612B $l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\sin^3x+1}{x^2\cos^2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sin^3x}{x}+\frac{1}{x^2}}{\cos^2x+\frac{1}{x^2}}$; deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^2x$ nu există, l nu există.

2.613B $l=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{m\cos mx}{n\cos nx}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(-10^m}{(-1)^n}=\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$ (altfel:

$l=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\cdot\frac{\sin mt\cos m\pi}{\sin nt\cos nt}=\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$)

2.614B $l=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)\arcsin\frac{1}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x^2-1}}{\frac{1}{2x^2+1}}=\frac{1}{2}$.

2.615B $0\leq\left|\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x+\cos x)e^{-x^2}\right|\leq\sqrt{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|e^{-x^2}\leq$

$\leq\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$ (dacă $|g(x)|<M$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$).

2.616B $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-a)(1+a)(1+a^2)\dots=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\dots=\frac{1}{1-a}\lim\limits_{n\to\infty}(1-$

$a^4)(1+a^4)\ldots = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^8)(1+a^8)\ldots = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n-1}})(1+a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n}) = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}}) = \frac{1}{1-a}$ deoarece $|a|<1$.

2.617B $l = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -\frac{1}{4}$. Altfel: $l = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$.

2.618B $l = \lim_{n\to\infty} n^3(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\sqrt{n^4+1}-n^2)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(\sqrt{n^4+1}+n^2)}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{8}$. Cu regula l'Hospital asociem funcţia $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}-\sqrt{2}}{x^4}$, $x\to 0$.

2.619B $a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$; $\alpha = 1$, $a_n = \frac{1}{2^n}\to 0$; $0<\alpha<1 \Rightarrow 0<a_n<\alpha^n\to 0$; $1<\alpha \Rightarrow 0<a_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^n}\cdot\frac{1}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^{n-1})} \le \frac{1}{2^{n-1}}\to 0$.

2.620B $l = \lim_{x\to -a}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{x}+\sqrt[5]{a}+\sqrt[7]{a}}{x+a} = \lim_{x\to -a}\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}\right) = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}+\frac{1}{7\sqrt[7]{a^6}}$. Altfel, notăm $a=-b$, $l = \lim_{x\to b}\left(\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{b}}{x-b}+\frac{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}}{x-b}\right)$, $\lim_{x\to b}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{b}}{x-b} = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

2.621B $l = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-\sqrt[5]{x+25}} = \lim_{x\to 7}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+20)^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+9)^3}}-\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+25)^4}}} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}-\frac{1}{80}}$.

Altfel: $l = \lim_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}-\frac{\sqrt[5]{x+25}-2}{x-7}}$ şi notăm succesiv $t=\sqrt{x+2}$, $u=\sqrt[3]{x+20}$, $v=\sqrt[4]{x+9}$, $w=\sqrt[5]{x+25}$ şi obţinem spre exemplu $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[5]{x+25}-2}{x-7} = \lim_{w\to 2}\frac{w-2}{w^5-2^5} = \lim_{w\to 2}\frac{1}{w^4+w^3\cdot 2+w^2\cdot 2^2+w\cdot 2^3+2^4} = \frac{1}{80}$.

2.622B $l = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^2}}-\frac{2}{3\sqrt{(2x+1)^2}}\right) =$

$\frac{1}{4}-\frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$. Altfel aplicăm $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{n}$,

$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{2x}\cdot 2\right) = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}$.

2.623B $l = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+1}) = \lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n^2+n}-n)-(\sqrt[3]{n^3+1}-n)] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}-\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)n^3}+\sqrt[3]{(n^3)^2}}\right] = \frac{1}{2}$; altfel $l = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\right) = \frac{1}{2}$.

2.624B $\lim_{n\to\infty} sin2x$ nu există: $\forall a\in[-1,1]\ \exists (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n = n\pi+\frac{1}{2}\arcsin a$, $\sin 2x_n = \sin(2n\pi+\arcsin a) = a\to a$, $x_n\to\infty$.

2.625B $l = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$.

2.626B Dacă $(2+\sqrt{5})^n = x_n+y_n\sqrt{5}$ să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$: $(2-\sqrt{5})^n = x_n-y_n\sqrt{5} \Rightarrow x_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n)]$, $y_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n]$. $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n} = 1$ (deoarece $\lim_{n\to\infty}a^n = 0$ dacă $|a|<1$).

2.627B Analog cu 2.616B cazul $a=\frac{1}{2}$: $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right) = 2$.

2.628B Notăm $n^{\frac{1}{n}}-1 = x_n$, $n^{\frac{1}{n}} = 1+x_n$, $\frac{\ln x}{n} = \ln(1+x_n)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^{\frac{1}{n}}-1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(1+x_n)} = 1$.

2.629B $a_1=1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2} \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = \sqrt{4}$ şi prin inducţie $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1+(\sqrt{n})^2} = \sqrt{n+1}$.

2.630B Fie $f(x) = \ln(1+\frac{2}{x})$ şi $u_n = \sum_{k=1}^{n}f(k)$: atunci $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{2}{k}) = \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right) = \infty$.

2.631B $x_{n+1} = \frac{1}{3}(b+x_n+x_{n-1}^2)$, $x_1 = x_2 = 0$, $b\in[0,1]$ este evident mărginit de 1, este crescător (prin inducţie $x_{x+1}-x_n = \frac{1}{3}[(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)]\ge 0$) deci convergent, $\lim x_n = l \Rightarrow l = \frac{1}{3}(b+l+l^2)$, $l = 1-\sqrt{1-b}$.

2.632B Dacă $a_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n!}{(n+1)^n}$ atunci

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}$.

2.633B $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{4}}(2-\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin x-\cos x}}=e^{-\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}$.

2.634B $\lim\limits_{n\to\infty}[a\ln(n+1)+b\ln(n+2)+c\ln(n+3)]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(a+b+c)\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\left(1+\frac{2}{n}\right)^b\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^c\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(a+b+c)\ln n=0$ dacă $a+b+c=0$.

2.635B $l=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

2.636B $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}$.

2.637B Fie şirul $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $x_0>0$, $a>0$; avem $x_n^2-a=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2-a=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}-\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2\geq0$, deci $x_n>\sqrt{a}$ şi x_n este descrescător $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leq0$; notăm $l=\lim x_n$, $l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right)\Rightarrow l^2=a$ deci $l=\sqrt{a}$.

2.638B Utilizând $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=1$.

2.639B $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$, $a,b,c>0$:

$l=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)+n(\sqrt[n]{c}-1)]}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c}=$

$e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$ ($\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{\substack{u\to1\\v\to\infty}}u^v=e^{\lim(u-1)v}$). Altfel, cu l'Hospital:

$l=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{3}}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c}=\sqrt[3]{abc}$.

2.640B Şirul $\{x_n\}\subset\mathbf{N}^*$ definit prin $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=n$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$ este şirul constant $x_n=1$: $n=1\Rightarrow x_1=1, n=2\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2$ deci $x_2=x_1=1$, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}=3\Rightarrow x_3=1$ şi prin inducţie $x_n=1$.

2.641B Restrângeţi expresia $t=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$. De fapt t este limita şirului recurent $x_n=\sqrt{1+x_{n-1}}$, $x_1=\sqrt{1}$. Fie şirul mai general $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $x_1=\sqrt{a}$ care este crescător şi mărginit: $0<\sqrt{a}$, $a<a+\sqrt{a}$, $\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $a+\sqrt{a}<a+\sqrt{a+\sqrt{a}}$ etc. $x_{n-1}<x_n\Rightarrow a+x_{n-1}<a+x_n$ şi $x_n=\sqrt{a+a_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}=x_{n+1}$; mărginirea: $x_{n+1}^2=a+x_n$, $x_{n+1}=\frac{a}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}<\frac{a}{x_1}+1=\sqrt{a}+1$. Deci x_n are limită dată de egalitatea $l^2=a+l$, $l=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.642C $x=\lim x_n$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}$; $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}<x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+1}\Rightarrow\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}<x_n<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}$; $\frac{2}{6}\leq\lim x_n\leq\frac{2}{6}$, $x=\frac{1}{3}$.

2.643C $k=?\Rightarrow l=\lim\sqrt[n]{1^k+2^k+\ldots+n^k}$ să fie finită:
$\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{1^k+2^k+\ldots+n^k}<\sqrt[n]{n\cdot n^k}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^k=1$ şi deci $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\leq l\leq\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{k+1}=1$, $l=1$, deci $k\in\mathbf{N}$.

2.644C Fie $x_n=(\sqrt{2}+1)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ şi $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}:(\sqrt{2}-1)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$, $a_n=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n]$, $b_n=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n]$,
$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n}=1$, $(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<1$, $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^n\to0$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dacă $|a|<1)$.

2.645C Deoarece $(\cos x+sinx)=0$ pentru $x_n=n\pi+\frac{3\pi}{4}$,

$l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}(\cos x+3\sin x)}{e^{-2x}(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos x+3\sin x}{e^x(\cos x+\sin x)}$ nu există.

2.646C $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\lim\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x-\sin x}}=1$ deoarece $\lim\limits_{t\to0}|t|^t=1$.

2.647C Singurul şir recurent, convergent la 0 este $x_n=\sqrt{x_{n-1}}$.

2.648C $l=\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\operatorname{arctg}x)=2\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=$

$=2\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=2\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}=2$

$(l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=2)$.

2.649C Vezi 2.642B. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+n^2}\le a_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{n^3+1}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$.

2.650C $\lim_{x\to1}\frac{\sin|\ln x|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin|\ln x|}{|\ln x|}\cdot\frac{\ln|1+(x-1)|}{x-1}=\begin{cases}1, & x>1\\ -1, & x<1\end{cases}$.

2.651C $\lim_{n\to\infty}(n^2+n+2)^{\frac{1}{n^2+n+1}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{m+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{m}\cdot\sqrt[m]{1+\frac{1}{m}}=1$.

2.652C Fie şirul x_n definit de $\log_4(x_n+2)-\log_2 x_n=n$, $n\in\mathbf{N}$, $0<x_n<1$. $\log_2\frac{\sqrt{x_n+2}}{x_n}=\log_2 2^n$, $4^n x_n^2-x_n-2=0$, $x_n=\frac{1+\sqrt{1+8\cdot4^n}}{2\cdot4^n}\to0$.

2.653C Din inegalitatea $\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$ luând $y_k=1$, $k=\overline{1,n}$, obţinem $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\le\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ deci $\lim\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}=0$ implică $\lim\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=0$.

2.654C Fie $l=\lim_{n\to\infty}n^k\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$ $(a^{\frac{1}{n}}-1)$: deoarece $\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ şi $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n+2}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n(n+2)}=-1$ atunci pentru $k=3$, $l=-\ln a$ iar $k>3$, $l=\infty$.

2.655C $c=?$ astfel ca $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2cx\ln(ex)+c^2}, & x\in(0,1)\\ c+3x, & x\in[1,2]\end{cases}$ să aibă limită în $x=1$. $\sqrt{x^2-2cx\ln ex+c^2}\to\sqrt{(c-1)^2}=|c-1|$ pentru $x\to1$, $x<1$, deci $|c-1|=3+c$, $c=-1$.

2.656C Dacă $f(x)=x^4-2x^3+x^2-2x$ şi g este câtul împărţirii lui f la x^2+1 să se calculeze $l=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[g(1)+g(2)+\ldots+g(n)]$. $f(x)=(x^2-2x)(x^2+1)$ deci $g(x)=x^2-2x$ şi $\sum_{k=1}^{n}g(k)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)$. Rezultă $l=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$.

2.657C $l=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)}{n^3+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2})}{n^3+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn^3+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n^3+n^2+1}=k+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$, deci $k=1$.

2.558C $l=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+\cos x}{1+x^2}=0$ deoarece $0<\left|\frac{\sin x+\cos x}{1+x^2}\right|\le\frac{\sqrt{2}}{1+x^2}\to0$.

2.659C Fie $l=\lim_{x\uparrow1}(1-x^2)f(x)-\lim_{x\downarrow1}f(x)$ unde $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, $f_n(x)=\begin{cases}1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}, & x\le1\\ e^{n(1-x)}, & x>1\end{cases}$. Deoarece $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+x^n)'=\left(x\cdot\frac{x^n-1}{x-1}\right)'=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ şi deci $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)^2}{(x-1)^2}=1$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}e^{n(1-x)}=0$, $l=1-0=1$.

2.660C $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\begin{cases}-\infty, & x>1\\ +\infty, & x<1\end{cases}$ deci nu există; $\lim_{n\to\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-x}\sin x=0\cdot M=0$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^x(2+\sin x)>\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$.

2.661C $l=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)^{nx+a_1+a_2+\ldots+a_n}}{(x+a_1)^{x+a_1}\cdot(x+a_2)^{x+a_2}\ldots(x+a_n)^{x+a_n}}$; utilizăm formula $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$ şi obţinem $l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_1}\right)^{x+a_1}\cdot\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_2}\right)^{x+a_2}\ldots\left(\frac{x+a_1+a_2+\ldots+a_n}{x+a_n}\right)^{x+a_n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{x+a_1}\right)^{x+a_1}\cdot\left(1+\frac{a_1+a_3+\ldots+a_n}{x+a_2}\right)^{x+a_2}\ldots\left(1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{x+a_n}\right)^{x+a_n}=e^{a_2+a_3+\ldots+a_n}\cdot e^{a_1+a_3+\ldots+a_n}\cdot\ldots\cdot e^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}=e^{(n-1)(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$.

2.3 Funcţii continue

2.662A Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x)=\sqrt{\sin x-\cos x}$. $\sin x-\cos x=\sin x-\sin(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin(x-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$, $\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$. $2k\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le(2k+1)\pi$, $x\in\bigcup_{k\subset Z}\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$.

2.663A Funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}, & n\ne1\\ a, & x=1\end{cases}$ este continuă dacă $a=\frac{1}{n}$ deoarece $\lim_{x\to1}=\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^n-1}=\frac{1}{n}$ $(\sqrt[n]{x}=t\to1)$.

2.664A $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x>0\\ ax+b, & x\le0\end{cases}$ este continuă dacă $b=1$, $a\in\mathbf{R}$ deoarece $\lim_{\substack{x\to0\\x\le0}}f(x)=b=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=1$ şi $a\in\mathbf{R}$ oarecare.

2.665A Funcţia $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x<2\\ a, & x=2\\ 5x-1, & x>2\end{cases}$ este continuă dacă $a=9$ deoarece limitele laterale în $x=2$ există şi sunt egale cu 9.

2.666A Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & n\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$, f este continuă dacă $a=4$.

2.667A Funcţia $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}$, $\begin{cases}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}\\ a, & x=0\end{cases}$ este continuă dacă $a=\sqrt{2}$. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\sqrt{2}$.

2.668A Funcţia $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $\begin{cases}\frac{6\sin a(x-1)}{x-1}, & x\in[0,1)\\ 5x+a, & x\in[1,2]\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6\sin a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}6a\cdot\dfrac{\sin a(x-1)}{a(x-1)}=6a=5+a$, $a=1$.

2.669A Funcţia $f(x)=\begin{cases}2x+m, & x\leq 1\\ m^2x+2, & x>1\end{cases}$ este continuă pentru $m\in\{0,1\}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x+m)=2+m=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(m^2x+2)=m^2+2$, $m^2-m=0$.

2.670A $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$, evident.

2.671A $f(x)=\begin{cases}ax+3, & x<b\\ 4a, & x=b\\ 3x+a, & x>b\end{cases}$ este continuă pentru $a=1$, $b=1$ sau $a=b=3$; $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}(ax+3)=ab+3=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}(3x+a)=3b+a=4a\Rightarrow a=b$, $a^2-4a+3=0$, $a=b=1$, $a=b=3$.

2.672A Mulţimea A a punctelor de continuitate ale funcţiei $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^32^{nx}}{1+2^{nx}}$. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x<0}}\dfrac{x+x^32^{nx}}{1+2^{nx}}=\dfrac{x+x^3\cdot 0}{1+0}=x$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x>0}}\dfrac{x+x^32^{nx}}{1+2^{nx}}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x>0}}\dfrac{xe^{-2nx}+x^3}{e^{-2nx}+1}=x^3$, $f(x)=\begin{cases}x & x\leq 0\\ x^3 & x>0\end{cases}$ este continuă, $A=\mathbf{R}$.

2.673A $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x^2-3x+2} & x\in(-\infty,0]\\ x\ln x & x\in(0,1]\\ e^{-x}-b & x\in(1,\infty)\end{cases}$ este continuă pentru $b=\frac{1}{e}$, $a\in\mathbf{R}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{ax}{x^2-3x+2}=0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}e^{-x}-b=\dfrac{1}{e}-b=0$.

2.674A Funcţia $f(x)=[x]\sin\pi x$ este continuă chiar şi în punctele $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, unde limitele laterale sunt egale şi egale cu 0, deci este continuă pe $\mathbf{R}$, mulţimea punctelor de discontinuitate este $\emptyset$.

2.675A Funcţia $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}a\sin x+\cos x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}]\\ \operatorname{tg}x+a\operatorname{ctg}x, & x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\end{cases}$ este continuă în $\frac{\pi}{4}$ dacă $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+a)=1+a$, deci $a=-1$.

2.676A $f(x)=\begin{cases}Ae^{2x}, & x\leq 0\\ \sin 2x+B\cos 3x, & x>0\end{cases}$ este continuă dacă $A=B$, $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=A=\lim\limits_{x\to +0}f(x)=B$.

2.677A $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{2}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ este continuă în $x=0$ doar dacă $a=0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{2}{x}=0$ ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$ dacă $f(x)\to 0$ şi $|g(x)|<M$).

2.678A Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}-a^2\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0), a\in\mathbf{R}\\ \ln(1+x), & x\in[0,\infty)\end{cases}$ şi S suma valorilor lui a pentru care f este continuă. Se cere S.

$$\lim_{x\to -0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}-a^2\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=2-a^2=\lim_{x\to +0}\ln(1+x)=0$$

deci $a=\pm\sqrt{2}$, $S=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$.

2.679A Fie $f(x)=\begin{cases}(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}, & x\neq 0, x\neq 1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=0\end{cases}$; se cer punctele de discontinuitate. $\lim\limits_{x\to -0}(1-e^{\frac{x}{1-x}})^{-1}=+\infty$ deoarece $1-e^{\frac{x}{1-x}}\to +0$ iar $\lim\limits_{x\to +0}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=-\infty$ deoarece $1-e^{\frac{x}{1-x}}\to -0$ deci $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa a II-a. Dacă $1-x>0$, $x<1$, $\lim\limits_{x\to 1}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=1-e^{\infty}=-\infty$ iar pentru $1-x<0$, $x>1$, $\lim\limits_{x\to 1}(1-e^{\frac{x}{1-x}})=1-e^{-\infty}=1$ deci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=1$, $x=1$ este de speţa întâi.

2.680B Ecuaţia $(x+1)2^{x+1}=1$ are cel puţin o rădăcină reală în $[-1,0]$. Fie $f(x)=(x+1)2^{x+1}-1$. Conform cu Darboux, deoarece $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(x)$ se anulează cel puţin într-un punct din $[-1,0]$.

2.681B Aflaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}+2^{2n}}}$;

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+(\frac{2}{x})^{2n}}}=\begin{cases}|x|, & |x|>2\\ 0, & |x|<2\\ \sqrt{2}, & |x|=2\end{cases}$ deci punctele ±2 sunt discontinuităţi de prima speţă.

2.682B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-[x^2]$. Se observă că limitele la dreapta în punctele $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ sunt 0 iar la stânga sunt 1 deci discontinuităţi de speţa întâi (se poate folosi şi graficul).

2.683B Punctele de discontinuitate ale funcţiei $f:[0,10]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$. Se observă (eventual folosind graficul) că limitele la dreapta în punctele 1,4,9 sunt 0 iar la stânga sunt 1 deci 1,4,9 sunt discontinuităţi.

2.684B $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$ are în 0 discontinuitate de speţa unu.

2.685B $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ este continuă.

2.686B Care din următoarele două funcţii $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ pot fi prelungite prin continuitate în $x=0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ putem da valoarea 1 în 0, prelungita lui f este $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$. Dar $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ deci nu poate fi prelungită în 0, prin continuitate.

2.687B Funcţia $f:[1,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2ax+a^2}, & x\in[1,2)\\ ax+3, & x\in[2,3]\end{cases}$ este continuă pentru $a=-\frac{1}{3}$ deoarece condiţia $|2-a|=2a+3$ este verificată pentru $a=-\frac{1}{3}$.

2.688B Funcţia $f(x)=\begin{cases}x^m\cos\frac{2}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ este continuă pentru $m>0$ deoarece $\lim\limits_{x\to0}x^m\cos x=0$ dacă $m>0$ ($0\le|x^m\cos x|\le|x^m|\to0$).

2.689B Fie $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$ şi k numărul de puncte de discontinuitate ale funcţiei f în intervalul $[-\pi,\pi]$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x=0$ pentru $(\forall)x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ şi $f(k\pi\pm\frac{\pi}{2})=1$, punctele $x=\pm\frac{\pi}{2}$ sunt de discontinuitate deci $k=2$.

2.690B Funcţia $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{arctg}\sqrt{-x}, & x\in(-1,0)\\ k, & x=0\\ \frac{a}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x\in(0,1)\end{cases}$

$a,k\in\mathbf{R}$ este continuă pentru $k=1$, $a=\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{t\to0}\frac{\operatorname{arctg}t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1+t}{1-t}-1\right)\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{2}{1-t}}=e^2$, $a\ln e^2=2a=1$, $a=\frac{1}{2}$.

2.691B Pentru funcţia $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2, & x\in Q\\ 3(x+1), & x\in\mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ mulţimea punctelor de discontinuitate este $\mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3}\}$. Există şiruri $(x_n)_n\subset Q$ şi $(y_n)_n\subset\mathbf{R}\setminus Q$, $x_n\to x$, $y_n\to x$, $x\in\mathbf{R}$ fixat. Atunci $f(x_n)=x_n^3+x_n^2\to x^3+x^2$ iar $f(y_n)=3(y_n+1)\to3(x+1)$; dar $x^3+x^2=3(x+1)$ numai pentru valorile $x=-\sqrt{3}$, $x=-1$, $x=\sqrt{3}$ deci f este continuă în $\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3}\}$.

2.692B Să se determine m şi n astfel încât funcţia $f(x)=\arcsin\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$. Deci trebuie să fie definită pe toată dreapta $\mathbf{R}$ şi $-1\le\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}\le1$, f fiind compunerea a două funcţii continue, funcţia raţională $x\to\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ şi $x\to\arcsin x$. Inegalitatea dublă ne dă: $0\le2x^2+mx+n+1$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ deci $\Delta=m^2-8(n+1)\le0$ şi $mx+n-1\le0$ $\forall x$, deci $m=0$ şi $n\le1$. Rezultă în final $m=0$ şi $n\in[-1,1]$.

2.693B Fie $f(x)=\sin x+\cos x$ şi l suma lungimilor intervalelor componente ale mulţimii $A=\{x\in[0,2\pi]|f(x)\ge0\}$. Se cere l. $f(x)=\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\ge0$ rezultă $-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{2}$ deci $x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ şi $l=\pi$.

2.694B $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ are un singur punct de discontinuitate $x=1$ deoarece $f(x)=\begin{cases}0, & x>1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}\infty, & x>1\\ 1, & x=1\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}$.

2.695B Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ continuă care verifică condiţia $f(x^2)=f(x)$, $(\forall)x\ge0$ este o constantă. $x\neq0$, $f(x)=f(\sqrt{x})=f(\sqrt[4]{x})=\ldots=f(\sqrt[2^{n-1}]{x})=\ldots=f(\sqrt[2^n]{x})$ este un şir constant, $\lim\limits_{n\to\infty}f(\sqrt[2^n]{x})=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{x}\right)=f(1)$. Dacă $x=0$, $x_n\to0$, $x_n\neq0\Rightarrow f(x_n)=f(1)\to f(0)$ deci $f(0)=f(1)$.

2.696B Funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}+b, & x<0\\ a, & x=0\\ x^x, & x>0\end{cases}$ este continuă în $x=0\Leftrightarrow b=0$, $a=1$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+b\right)=b+1$, $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ sau $\lim\limits_{x\to 0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0$ rezultă $b+1=a=1$ deci $b=0$, $a=1$.

2.697C $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in Q\\ x+3, & x\in \mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă în două puncte $x=-1$ şi $x=2$. Fie $(x_n)_n\subset Q$ şi $(y_n)_n\subset \mathbf{R}\setminus Q$, $x_n\to x$, $y_n\to x$, $x\in\mathbf{R}$ fixat. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+1)=x^2+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n+3)=x+3$; dacă $x\neq -1$, $x\neq 2$, $x^2+1\neq x+3$ deci x este de discontinuitate. Dacă $x^2+1=x+3$ deci în $x=-1$ sau $x=2$, f este continuă.

2.698C $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\in Q\\ x^3, & x\in\mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă numai în 1 (2.697C).

2.699C $f(x)=[x]+2$ nu are proprietatea lui Darboux deoarece ia numai valori naturale $3,4,5,\ldots,n,\ldots$.

2.700C $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\\ x^3, & x\in\mathbf{R}\setminus Q\end{cases}$ este continuă numai într-un număr finit de puncte $x=0$, $x=\pm 1$ (unde $x=x^3$, vezi 2.697C).

2.701C $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ are proprietatea lui Darboux deoarece admite primitive (vezi [4], pag. 14).

2.702C Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă. Atunci există un $x_0\in[0,1]$ astfel încât $f(x_0)=x_0$. Într-adevăr, notând cu $g(x)=f(x)-x$, observăm că $g(0)=f(0)\geq 0$ iar $g(1)=f(1)-1\leq 0$ dar g fiind continuă, există un punct x_0, astfel ca $g(x_0)=0$ adică $f(x_0)=x_0$.

2.703C Repetă problema 2.697C.

2.704C Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel ca $f(x)=f(2x+1)$. Fie $x\in\mathbf{R}$ arbitrar. Rezultă că $f(x)=f\left(\frac{x+1}{2}-1\right)=f\left(\frac{\left(\frac{x+1}{2}-1\right)+1}{2}-1\right)=f\left(\frac{x+1}{2^2}-1\right)=\ldots=f\left(\frac{x+1}{2^n}-1\right)\ldots$ deci $f(x)=\lim f\left(\frac{x+1}{2^n}-1\right)=f(-1)$ adică f este constantă.

2.705C Fie $0<a<1$ şi $b>0$. Atunci ecuaţia $x=a\sin x+b$ are cel puţin o soluţie în $(0,a+b)$, deoarece prima bisectoare $y=x$ intrsectează cel puţin o dată sinusoida $y=a\sin x$ deplasată pe ordonată cu $b>0$, $y=a\sin x+b$, intersecţia are loc pentru $x<a+b$, deoarece $a+b>a\sin(a+b)+b$.

2.706C Să se afle tipul de funcţie elementară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continuă pe $\mathbf{R}$ pentru care $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=0$: a) exponenţială; b) polinom de gradul întâi; c) polinom de gradul doi; d) logaritmică e) constantă; f) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbf{N}^*$. Verificând grila observăm că $f(x)=2x+\frac{1}{2}$, deci b).

2.707C Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $x^3+4x-6=0$ in intervalul [1,2]. Deoarece $f(1)=-1<0$, $f(2)=10>0$ iar derivata $f'(x)=3x^2+4>0$, funcţia $f(x)=x^3+4x-6$ este strict crescătoare şi are o singură rădăcină în [1,2].

2.708C Funcţiile $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \pi, & x=0\end{cases}$ sunt discontinue în origine şi totuşi $f\circ g$ continuă în 0:

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\frac{\sin g(x)}{g(x)}, & g(x)\neq 0, g(x)=\pi, x=0\\ 0, & g(x)=0, x\neq 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\sin\pi}{\pi}, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}=0.$$

2.709C Funcţia $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q\cap(0,1)\\ 1-x, & x\in(\mathbf{R}\setminus Q)\cap(0,1)\end{cases}$ nu este continuă şi nu are proprietatea lui Darboux. f are un singur punct de continuitate $x=\frac{1}{2}$ (soluţia ecuaţiei $x=1-x$) nu are proprietatea lui Darboux deoarece valorile $y\in(0,\frac{1}{2})\cap\mathbf{R}\setminus Q$ nu sunt luate pentru $x\in(0,\frac{1}{2})\cap(\mathbf{R}\setminus Q)$ ci pentru $x\in(\frac{1}{2},1)\cap(\mathbf{R}\setminus Q)$. Analog pentru $(\frac{1}{2},1)$.

2.710C Se dau funcţiile $f:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,2)$, $g:(0,2)\to\mathbf{R}$ şi $h:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}$ astfel încât $g(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & x\in(0,1]\\ \frac{x+1}{3}, & x\in(1,2)\end{cases}$, $h(x)=\cos x$, $h=g\circ f$. Care este mulţimea $A=\{x\in(0,\frac{\pi}{2})|f$ este discontinuă în $x\}$. Deoarece g^{-1} şi h sunt continue, $f=g^{-1}\circ h$ este continuă şi deci $A=\emptyset$. Dăm şi o verificare directă, în amănunt. Calculăm inversa lui g. $y=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & x\in(0,1], y\in(0,\frac{2}{3}]\\ \frac{x+1}{3}, & x\in(1,2), y\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ deci $g:(0,2)\to(0,1)$, $g^{-1}:(0,1)\to(0,2)$, $y=g^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & x\in(0,\frac{2}{3}]\\ 3x-1, & x\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ (deoarece $x=\begin{cases}\frac{3}{2}y, & y\in(0,\frac{2}{3}]\\ 3y-1 & y\in(\frac{2}{3},1)\end{cases}$ şi schimbăm y cu x). Avem $f=g^{-1}\circ h$, $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\cos x, & 0<\cos x\leq\frac{2}{3}, x\in[\arccos\frac{2}{3},\frac{\pi}{2})\\ 3\cos x-1, & \frac{2}{3}<\cos x<1, x\in(0,\arccos\frac{2}{3})\end{cases}$. Se observă că f este continuă în $x=\arccos\frac{2}{3}$ şi $f(\arccos\frac{2}{3})=1$.

2.711C $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & x \in Q \\ x^2 - 2, & x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$ este continuă numai în punctele $x \in \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$ soluţii ale ecuaţiei $x^3 - 2x = x^2 - 2$ (vezi 2.697C).

2.712C Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbf{R}$ funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă: $\lim_{x \to -0} f(x) = 0 = \lim_{x \to +0} f(x) = b$, deci $b = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

2.713C Funcţia $f : [0,2] \to [0,1]$, definită de $f(x) = x - [x]$ nu are proprietatea lui Darboux cu toate că $\mathrm{Im} f$ este un interval. Într-adevăr observăm că $f([\frac{7}{8}, \frac{9}{8}]) = [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{7}{8}, 1]$ deci nu are proprietatea lui Darboux, dar $f([0,2]) = [0,1)$.

2.4 Derivabilitate

2.714B Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x), & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ \alpha x, & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă în $x = 0$. f este continuă în 0 pentru $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ dar este derivabilă pentru $\alpha = 2$ deoarece $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$, $f'(-0) = 2 = \alpha = f'(+0)$.

2.715A Care derivată este corectă? a) $(e^{x^2})' = (1+x)e^{x^2}$; b) $\left(\frac{1}{1+|x|}\right)' = \frac{-1}{(1+|x|)^2}$; c) $(\ln(1+e^x))^2 = \frac{1}{1+e^{-x}}$; d) $(\sin x)' = \sin x$; e) $(\sqrt{x})' = 2x$; f) $(1)' = 1$. Corectă este c): $(\ln(1+e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

2.716A Se cere $\lambda = f'(0)$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - x}{x^2} = 0$ (sau $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = 0$.

2.717A Valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ ax + \pi, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ este derivabilă, este -1 : $f(\pi - 0) = 0 = a\pi + \pi = f(\pi + 0)$, $f'(\pi - 0) = \cos \pi = -1 = f'(\pi + 0) = a$.

2.718A Punctele în care $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ nu este derivabilă sunt ± 1: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$ nu există în $x = \pm 1$.

2.719A Cât este $f^V(0)$ dacă $f(x) = x^4 e^{2x} \cdot (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$,

$(e^{2x} \cdot x^4)^V = (e^{2x})^V \cdot x^4 + 5(e^{2x})^{IV} \cdot 4x^3 + 10(e^{2x})''' \cdot 12x^2 + 10(e^{2x})'' \cdot 24x + 5(e^{2x})' \cdot 24 \Rightarrow f^V(0) = 240 = 10 \cdot 4! = 2 \cdot 5!$.

2.720A Derivata funcţiei $f(x) = x^x - a^x - x^a$, $x > 0$, $a > 0$ în punctul $x = a$: $f'(x) = x^x(1 + \ln x) - a^x \ln a - ax^{a-1}$, $f'(a) = a^a(1 + \ln a) - a^a \ln a - a^a = 0$.

2.721A Derivata laterală la dreapta $f'_d(0)$ a funcţiei $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$; $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x\right] + (\cos x)^{\sin x}\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \ln \cos x\right]$; $\lim_{x \to 0} (\sin x)^{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} [(\sin x)^{\sin x}]^{\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}} = 1^0 = 1$; $\lim_{x \to 0} \sin x \ln \sin x = \lim_{x \to 0} \ln(\sin x)^{\sin x} = \ln 1 = 0$ deci $f'_d(0) = 1$. A doua limită este evident 0.

2.722A Să se determine punctele în care $f : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ nu este derivabilă, dar admite derivată: $f'(x) = 1 + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}}$, deci nu este derivabilă în $-\pi, 0, \pi$, dar admite derivată infinită ($+\infty$ în 0 şi $-\infty$ în $\pm\pi$).

2.723A Derivatele laterale $f'_s(\pi)$, $f'_d(\pi)$ ale funcţiei $f(x) = |cosx|$ sunt egale cu 0, deoarece pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $|cosx| = -\cos x$, $f'(\pi) = f'_s(\pi) = f'_d(\pi) = \sin \pi = 0$.

2.724A Care din funcţiile $f(x) = |x|$, $g(x) = x|x|$ sunt derivabile în origine şi care nu: $f'_s(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$, $g'_s(x)|_{x=0} = (-x^2)'_{x=0} = -2x|_{x=0} = 0 = g'_d(0)$ deci f nu este derivabilă iar g este derivabilă în 0.

2.725A Derivata funcţiei $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^5 + \ln(x+1)$ în $x = 1$: $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^4 \cdot \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}$, $f'(1) = \frac{1}{12}$.

2.726A Derivata funcţiei $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \frac{1-x}{1+x}$ în punctul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $f'(x) = 2\frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = \pi$.

2.727A Pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ valoarea expresiei $E(x) = (x^2 - 1)f''(x) + xf'(x)$, unde $f(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^\alpha$ este $E(x) = a^2 f(x)$. Avem $f'(x) = \alpha(x + \sqrt{x^2-1})^{\alpha-1}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \alpha\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha}{\sqrt{x^2-1}}$, $f'(x) = \sqrt{x^2-1} = \alpha f(x) \Rightarrow f''(x)\sqrt{x^2-1} + f'(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \alpha f'(x)$ sau $(x^2-1)f''(x) + xf'(x) = \alpha\sqrt{x^2-1}f'(x) = \alpha^2 f(x)$.

2.728A Funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + ax + 1}$, $a \in \mathbf{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x+a}{\sqrt[3]{(x^2+ax+1)^2}}$ dacă $x^2 + ax + 1 = 0$ are rădăcini complexe deci $\Delta < 0$, $a^2 - 4 < 0$, $a \in (-2, 2)$.

2.729A Funcţia $f(x)=\begin{cases} x^4+ax+2, & x<0 \\ b+\ln(1+x^4), & x\geq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $a=0$, $b=2$: $f_s(0)=f(-0)=2=b=f(+0)=f_d(0)$, $f'_s(0)=(4x^3+a)_{x=0}=a=f'_d(0)=\frac{4x^3}{1+x^4}\Big|_{x=0}=0$.

2.730A Valorile lui a şi b pentru care funcţia $f(x)=\begin{cases} 2x^2+b, & x\leq 2 \\ 2ax^3+11a, & x>2 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ sunt $a=\frac{1}{3}$, $b=1$: $f_s(2)=8+b=f_d(2)=27a$, $f'_s(2)=4x|_{x=2}=8=f'_d(2)=24a\Rightarrow a=\frac{1}{3}$, $b=1$.

2.731A Dacă $f(x)=2^{|x+1|}$ cât este $f'(0)$: $|x+1|=(x+1)$ dacă $x>-1\Rightarrow f'(0)=(2^{x+1})'|_{x=0}=2\ln 2$

2.732A Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este derivabilă şi impară atunci f' este pară: $f(x)=-f(-x)$, $f'(x)=-f'(-x)(-1)=f'(-x)$.

2.733A Dacă u,v sunt derivabile regula $(a^u)'=a^u u'$ este greşită celelalte sunt corecte.

2.734A Cât este a pentru care $f:[0,2]$, $f(x)=\min\left\{x,\frac{2}{1+x^2}\right\}$ $f'(a)$ nu există, $a\in[0,2]$: $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ \frac{2}{1+x^2}, & x\in(1,2] \end{cases}$ deci pentru $a=1$, $f'(a)$ nu există, $f'_s(1)=1$, $f'_d(1)=-1$.

2.735A Derivata funcţiei $f(x)=x^{x^2+1}$, $x>0$: $f'(x)=x^{x^2+1}((x^2+1)\ln x)'=x^{x^2+1}\left(\frac{x^2+1}{x}+2x\ln x\right)=(x^2+1)x^{x^2}+2x^{x^2+2}\cdot\ln x$.

2.736A $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+l, & x\leq 2 \\ mx+3l-6, & x>2 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $m=l=1\Rightarrow f'_s(2)=1=m=f'_d(2)$, $f_s(2)=4-6+l=f_d(2)=2m+3l-6\Rightarrow m+l=2$, $m=1$, $l=1$.

2.737A $f(x)=\begin{cases} x^4+ax+2, & x<0 \\ b+\ln(1+x^2), & x\geq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $a=0$ şi $b=2$. Rezultă din egalităţile $f(0)=2=b$, $f'(0)=0=a$.

2.738A $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$ şi $l=f'(1)$; atunci $l=2x|_{x=1}=2$.

2.739A Derivatele funcţiilor $f(x)=\sin(\arccos x)+\cos(\arcsin x)$, $x\in(-1,1)$, $g(x)=\arcsin(\sin x)+\arccos(\sin x)$. Avem $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=2\sqrt{1-x^2}$ şi $g(x)=\frac{\pi}{2}$, $g'(x)=0$, $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (altfel $f'(x)=-\frac{\cos(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$).

2.740B Cât este $n\in\mathbf{N}^*$ dacă $f^{(n)}(0)=-72$ şi $f(x)=x^2e^{-x}$. $f^{(n)}(x)=(e^{-x})^{(n)}x^2+n(e^{-x})^{(n-1)}2x+\frac{n(n-1)}{2!}(e^{-x})^{(n-2)}2\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{2!}(-1)^{n-2}2=-72$, deci $n=9$.

2.741B Dacă $f(x)=\frac{\sin(\alpha\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, valoarea expresiei $E=(x^2-1)f''(x)+3xf'(x)-(\alpha^2-1)f(x)$ este 0. Se derivează $f(x)$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\sin(\alpha\arccos x)-\frac{\alpha\cos(\alpha\arccos x)}{1-x^2}$, deci $(1-x^2)f'(x)=xf(x)-\alpha\cos(\alpha\arccos x)$ şi derivând obţinem $(1-x^2)f''(x)-2xf'(x)=xf'(x)+f(x)-\alpha^2f(x)$.

2.742B Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$ dacă $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\leq 2 \\ -x^2-2x, & x>0 \end{cases}$. Ecuaţia $x^2-2x=3$, $x<0$ are rădăcina $x_0=-1$, iar ecuaţia $-x^2-2x=3$, $x>0$ are rădăcini complexe deci $f(-1)=3$, $f^{-1}(3)=-1$. $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{2x-2}|_{x=-1}=-\frac{1}{4}$.

2.743B Punctele de derivabilitate ale lui $f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ sunt $\mathbf{R}\setminus\{0\}$: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ nu există.

2.744B Cât este $f'(3)$ dacă $f:(1,\infty)$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{x^n}$. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-(\frac{1}{x})^n}{x-1}=\frac{x}{x-1}$, $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $f'(3)=-\frac{1}{4}$.

2.745B Să se determine a astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+x}}, & x\in(-1,0) \\ a, & x\notin(-1,0) \end{cases}$ să fie derivabilă; dacă $x\in(-1,0)$, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=e^{-\infty}=0$ deci din continuitate, $a=0$, $f'(x)=e^{\frac{1}{x^2+x}}\cdot\frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=\lim\limits_{x\to -1}f'(x)$ deoarece notând $\frac{1}{x^2+x}=-t$, $(x\in(-1,0))$ $t\to\infty$ când $x\to 0$ sau $x\to -1$ avem $\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$.

2.746B Fie $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ dacă f este derivabilă o dată, dar nu de două ori, pe $\mathbf{R}$. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}=0$ dacă $m-1>0$, $m>1$. Pentru $x\neq 0$, $f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$, deci $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}\right)=0$ dacă $m>3$, şi $f''(0)$ nu există dacă $1<m\leq 3$.

2.747B Se cere valoarea $f'(2)$ pentru $f(x)=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$, $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{x+1}{x^2+1}$; $f'(2)=\frac{1-4}{16}+\frac{3}{5}=\frac{33}{80}$.

2.748B Derivata $f^{(n)}(x)$ pentru $f(x)=e^{-x}x^2$, $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$, $(e^{-x}x^2)^{(n)}=(e^{-x})^{(n)}x^2+n(e^{-x})^{(n-1)}2x+\frac{n(n-1)}{2}(e^{-x})^{(n-2)}2=(-1)^n e^{-x}(x^2-2nx+n(n-1))$.

2.749B Dacă $g(x)=f(ax+1)$, $a\neq 0$ şi $f''(1)=1$ (f derivabilă de două ori) atunci $g''(0)=a^2$; $g'(x)=af'(ax+1)$, $g''(x)=a^2f''(ax+1)$, $g''(0)=a^2f''(1)=a^2$.

2.750B Se cere $f^{(n)}(x)$ pentru $f(x)=x\ln(x+1)$, $x>-1$: $(x\ln(x+1))^{(n)}=(\ln(x+1))^{(n)}\cdot x+n(\ln(x+1))^{(n-1)}$; dar $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(k)}=(-1)^k\frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$, deci $f^{(n)}(x)=x\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)}+n\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-2)}=x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}+(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}n=$
$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)![(x+1)-1]}{(x+1)^n}+(-1)^n\frac{(n-2)![(n-1)+1]}{(x+1)^n}=$
$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^{n-1}}-(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}+(-1)^n\frac{(n-1)!}{(x+1)^{n-1}}+(-1)^n\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}=$
$=(-1)^n\frac{(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}+(-1)^n\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

2.751B Dacă $f(x)=\frac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$, $\lambda\in\mathbf{R}^*$ şi x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$ atunci $\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=e^2$. $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+\lambda^2)^2}e^{\lambda x}+\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}e^{\lambda x}=0\Rightarrow \lambda x^2-2x+\lambda^3=0$, $x_1+x_2=\frac{2}{\lambda}$, $x_1x_2=\lambda^2$ deci $\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^2}}=\lim_{\lambda\to 0}e^{\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}-1\right)\frac{1}{\lambda^2}}=e^{\lim_{\lambda\to 0}\frac{2}{1-\lambda^2}}=e^2$.

2.752B Funcţia $f(x)=\frac{|x^2-6x+5|}{x^2+1}$ are limite laterale în $x=5$ dar nu este derivabilă în $x=1$. $\lim_{x\to 5}f(x)=0$ dar $f_s'(1)\neq f_s'(1)$.

2.753B În ce puncte din interiorul domeniului de definiţie D, funcţia $f(x)=\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ nu este derivabilă. $D=[1,\infty)$, $f(x)=|\sqrt{x-1}-3|=\begin{cases}\sqrt{x-1}-3, & x\geq 10\\ -\sqrt{x-1}+3, & x<10\end{cases}$ deci în $x=10$; $x=1\notin \text{int}D$.

2.754B Cât este $f'(2)$ dacă $f(x)=(x^3)^{x^2}$, $x>0$. Folosim formula $(f(x)^{g(x)})'=f(x)^{g(x)}(g(x)\cdot\ln f(x))'$;
$((x^3)^{x^2})'=(x^3)^{x^2}(3x^2\ln x)'=(x^3)^{x^2}(3x+6x\ln x)$, $f'(2)=8^4(6+2\ln 64)$.

2.755B Pentru ce valori ale lui $a,b\in\mathbf{R}$, funcţiile $f(x)=x\ln(1+a|x|)$ şi $g(x)=\begin{cases}ax+b, & x\leq e\\ \ln^3 x, & x>e\end{cases}$ sunt derivabile? $g_s(e)=ae+b=g_d(e)=1$,

$g_d'(e)=\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\left(3\frac{1}{x}\ln^2 x\right)=\frac{3}{e}=g_s'(e)=a$ deci $a=\frac{3}{e}$, $b=-2$; pentru $a=\frac{3}{e}$, $f(x)$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, $f_s'(0)=f_d'(0)=0$.

2.756C Care este valoarea $\lambda=(f^{-1})'(3)$ dacă $f(x)=x^3+x+1$, $x\in\mathbf{R}$. f^{-1} există deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$ şi f este strict crescătoare. Dacă $y_0=f(x_0)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$ atunci $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ deci pentru $y_0=3=x_0^3+x_0+1$ rezultă $x_0=1$, de unde $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3x+1}|_{x=1}=\frac{1}{4}$.

2.757C Fie M mulţimea punctelor în care $h(x)=\sqrt[3]{x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2}$ nu are derivată şi k numărul elementelor lui M. Cât este k? Se observă uşor că $g=x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2$ are pe 1 şi -1 rădăcini duble, deci $g=(x^2-1)^2(x-2)$, $h'(x)=\frac{4x(x^2-1)(x-2)+(x^2-1)^2}{3\sqrt[3]{[(x^2-1)^2(x-2)]^2}}$. În punctele $x=\pm 1$, $x=2$, $h'(x)$ este infinită, dar h are derivată, deci $M=\emptyset$, $k=0$.

2.758C Fie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x+x+m$ şi M mulţimea acelor $m\in\mathbf{R}$ pentru care f este bijectivă. Pentru $m\in M$ calculaţi $\lambda=(f^{-1})'(m+1)$. $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ deci f injectivă. f este continuă pe $(0,\infty)$, $f(+0)=-\infty$, $f(\infty)=\infty$ deci f este surjectivă pe $M=\mathbf{R}$. Procedăm ca în 2.756C: $y_0=m+1=\ln x_0+x_0+m$, $x_0=1$: $(f^{-1})'(m+1)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{x_0}{x_0+1}|_{x_0=1}=\frac{1}{2}$.

2.759C Fie $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ şi $g(x)=2\text{arctg}\,x$, $x\in\mathbf{R}$; atunci $f'(x)=g'(x)$ pentru $|x|<1$: $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\begin{cases}\frac{2}{1+x^2}, & |x|<1\\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x|>1\end{cases}$ nu există pentru $|x|=1$, $g'(x)=\frac{2}{1+x^2}$ deci $f'(x)=g'(x)$ pentru $|x|<1$.

2.760C Să se calculeze $l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $l=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,x)}{\ln x}}$;
$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=-1$.

2.761C $\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\right)\right]'=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{\frac{1}{e}-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\right]=-1$.

2.762C Funcţia $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ este indefinit derivabilă şi $f^{(n)}(0)=0$: $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right),\ldots,=f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x}}P(\frac{1}{x})$ unde $P(\frac{1}{x})$ este un polinom în variabila $\frac{1}{x}$. Deci $f^{(n)}(0)=\lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{e^t}=0$.

2.763C Fie $f(x)=e^{2x}$ şi $g(x)=e^{-x}$ şi $a=f^{(10)}(-1)+g^{(19)}(2)$. Cât este a? $f^{(10)}(x)=2^{10}e^{2x}$, $f^{(10)}(-1)=2^{10}\cdot e^{-2}$, $g^{(19)}(x)=(-1)^{19}e^{-x}$,

$g^{(19)}(2) = -e^{-2}$, $a = e^{-2}(2^{10}-1)$.

2.764C Vezi problema 2.746B.

2.765C Fie $f(x) = x^3+2x^2+4x+4$ bijectivă (deoarece $f'(x) = 3x^2+4x+4 > 0$, $\Delta = 4-12 = -8 < 0$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$) deci există f^{-1}. Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$. $y_0 = 4 = f(x_0) = x_0^3 + 2x_0^2 + 4x_0 + 4 \Rightarrow x_0 = 0$, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{3x^2+4x+4}|_{x=0} = \frac{1}{4}$.

2.766B Să se determine $\lim\limits_{t\downarrow 0} g^{(n)}(x)$ dacă $g(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$. Avem $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$, $g''(x) = \frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) - \frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$ deci $4xg''(x) = (e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}) - \frac{2}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$ sau $4xg''(x)+2g'(x) = g(x)$. Derivăm de $n-2$ ori ultima egalitate, observând că $(xg''(x))^{(n-2)} = xg^{(n)}(x) + (n-2)g^{(n-1)}(x)$, deci $4[xg^{(n)}(x) + (n-2)g^{(n-1)}(x)] + 2g^{(n-1)}(x) = g^{(n-2)}(x)$ de unde $2(2n-3)g^{(n-1)}(0) = g^{(n-2)}(0)$. Dăm valori lui n şi înmulţim egalităţile membru cu membru: $2\cdot 1\cdot g'(0) = g(0)$, $2\cdot 3\cdot g''(0) = g'(0)$, $2\cdot 5\cdot g'''(0) = g''(0), \ldots, 2\cdot(2n-3)g^{(n-1)}(0) = g^{n-2}(0)$, $2\cdot(2n-1)g^{(n)}(0) = g^{(n-1)}(0) \Rightarrow 2^n\cdot(2n-1)!!g^{(n)}(0) = 2$. Altfel, dezvoltăm în serie $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ (sau direct $\operatorname{ch}x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ şi obţinem $g(x) = 2\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\ldots+\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots\right)$, $g^{(n)}(x) = 2\left(\frac{n!}{(2n)!}+x\varphi(x)\right)$, $g^{(n)}(0) = 2\cdot\frac{n!}{(2n)!} = 2\cdot\frac{n!}{2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$.

2.767C Punctele de continuitate ale funcţiei $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x\in Q \\ x^3, & x\in \mathbf{R}\setminus Q \end{cases}$ sunt în mulţimea $(1,2)\cup(8,9)$ (vezi 691B, 697B) deoarece pentru $g(x) = 2^x - x^3$ avem $g(1) = 1 > 0$, $g(2) = -4 < 0$, $g(8) = 2^8 - 8^3 = 2^8 - 2^9 < 0$, $g(9) = 2^9 - 9^3 = 512-243 > 0$, iar punctele de continuitate sunt la intersecţia curbelor $y = 2^x$ şi $y = x^3$ deci acolo unde $g(x) = 0$. Există şi alte puncte de continuitate?

2.768C Fie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ şi $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(1)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Prin inducţie se arată că $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$. $f^{(k)}(1) = (-1)^k\frac{k!}{2^{k+1}}$, $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \to 1$.

2.769C Să se determine constantele A, B astfel ca funcţia $f(x) = \begin{cases} Ae^{2x}, & x\le 0 \\ \sin 2x + B\cos 3x, & x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă. $f_s'(0) = 2Ae^{2x}|_{x=0} = 2A = f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2\cos 2x - 3B\sin 3x)|_{x=0} = 2$, deci $A = B = 1$.

2.770C Funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este derivabilă, dar f' nu este continuă în $x = 0$: $f'(0) = \lim\limits_{n\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{n\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $\lim\limits_{n\to 0} f'(x) = -\lim\limits_{n\to 0}\cos\frac{1}{x}$ nu există.

2.771C Funcţia $f(x) = \begin{cases} x[\frac{1}{x}], & x\neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$: pentru $x > 0$, $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \to n \le \frac{1}{x} < n+1$ deci $[\frac{1}{x}] = n$, $\frac{n}{n+1} < x\cdot[\frac{1}{x}] \le \frac{n}{n}$ pentru $x\in[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ de unde $1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \le \lim\limits_{n\to\infty} x\cdot[\frac{1}{x}] \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1$. Analog pentru $x < 0$.

2.772C Punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sunt puncte de întoarcere pentru funcţia $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$, $x\in\mathbf{R}$: $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$, $x\neq\pm 1$, $f_s'(-1) = -\infty$, $f_d'(-1) = +\infty$, $f_s'(1) = +\infty$, $f_d'(1) = -\infty$.

2.5 Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatei

2.773A Soluţiile reale ale ecuaţiei $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$ unde $a\in(5,32)$ verifică $x_1\in(0,2)$, $x_2\in(2,3)$. Aplicăm şirul lui Rolle: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $f(-1) = a-5$, $f(0) = a$, $f(2) = a-32$, construim tabloul şirului lui Rolle cu valorile $-\infty, -1, -0, 2, \infty$ pentru x pe orizontală şi $-\infty, 0, 5, 32, +\infty$ pentru a pe verticală. Dar $a\in(5,32)$ deci $x_1\in(0,2)$ şi $x_2\in(2;3)$.

2.774A Să se determine punctul intermediar "c" din teorema Lagrange pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x\in[-2,1) \\ \frac{x+7}{4}, & x\in[1,5] \end{cases}$, $x\in[-2,5]$. $f(5) - f(-2) = (5+2)f'(c)$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, & x\in(-2,1) \\ \frac{1}{4}, & x\in[1,5) \end{cases}$, $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+3}} = \frac{2}{7}$ deci $c = \frac{1}{16}$.

2.775A Să se arate că $f(x) = x - \sin x$ şi $g(x) = -x + \cos x$ sunt respectiv strict crescătoare şi strict descrescătoare: $f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \ge 0$, $g'(x) = -1 - \sin x = -(1+\sin x) \le 0$.

2.776A Fie $f(x) = x^2e^x$. Deoarece $f'(x) = (x^2+2x)e^{2x}$, semnul lui $f'(x)$ este semnul trinomului x^2+2x, $f'(x)\ge 0$ şi f este crescătoare în $(-\infty,-2]$ şi $[0,\infty)$, iar $f'(x)\le 0$ în $[-2,0]$, deci în $[-2,0]$ este descrescătoare strict.

2.777A Studiaţi monotonia funcţiei $f(x)=(x+1)\ln x$. $f'(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x=g(x)\geq 2$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1+\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}+\ln x)=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+x\ln x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$), $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, $g'(1)=0$, $g'(x)<0$ pentru $x<1$, $g'(x)>0$ pentru $x>1$ deci $g(x)$ descreşte pe $(0,1]$ şi creşte pe $[1,\infty)$ de unde $f'(x)\geq 2>0$, f strict crescătoare.

2.778A Funcţia $f:(-\infty,-1)\cup(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(0,\infty)$. $f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right]$ deci trebuie studiată funcţia $g(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{x+1}$. $g'(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}$, $g'(x)>0$ pe $(-\infty,-1)$ şi $g'(x)<0$ pe $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}g(x)=\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]=-\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}\frac{1}{x+1}\left[1-(x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right]=+\infty$ deoarece $\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}(x+1)\ln\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{\substack{n\to-1\\ x<-1}}\frac{\frac{x}{x+1}(-\frac{1}{x^2})}{-(\frac{1}{x+1})^2}=0$. Prin urmare g creşte de la 0 la $+\infty$ pe $(-\infty,-1)$, deci $g(x)>0$, f crescătoare; Analog pe $(0,\infty)$, $g'(x)<0$, g descreşte de la ∞ la 0 deci $g(x)>0$, f creşte.

2.779A Fie $f:[1,6]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ şi $m=\min f$, $M=\max f$: $f'(x)=\frac{x^2-16}{8x^2}$, $f'(x)<0$ pe $[1,4]$ şi $f'(x)>0$ pe $[4,6]$ are un minim în $x=4$, $f(4)=1$, $f(1)=\frac{17}{8}$, $f(6)=\frac{25}{12}$, deci $m=1$ şi $M=\frac{17}{8}$.

2.780A Fie $f:[-2,0]\to\mathbf{R}$, $f(x)=|\frac{1+x}{1-x}|$. Să se determine $m=\min f$, $M=\max f$. Se face garficul funcţiei $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$ pe $[-2,0]$ iar pe intervalul $(-2,-1)$ unde $g(x)<0$ se construieşte simetricul faţă de axa absciselor. Evident $m=0=f(-1)$ iar $M=\sup(|f(-2)|,f(0))$ deoarece $g'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$. g creşte de la $f(-2)=-\frac{1}{3}$ la $f(0)=1$.

2.781A Să se determine $m=\min f$, $M=\max f$ unde $f:[0,10]$, $f(x)=\sqrt{x(10-x)}$: $f'(x)=\frac{-2x+10}{2\sqrt{x(10-x)}}$, $f'(x)>0$ pentru $x<5$, $f'(x)<0$ pentru $x>5$, $m=f(0)=f(10)=0$, $M=f(5)=5$.

2.782A $l=\lim\limits_{x\downarrow 0}x(\operatorname{ctg}x+\ln x)=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$.

2.783A $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$.

2.784A Se cer valorile parametrului $m\in\mathbf{R}$ pentru care $f(x)=(x^2+mx)e^{-x}$ admite două puncte de extrem. $f'(x)=(-x^2+(2-m)x+m)e^{-x}$, avem

două puncte de extrem dacă trinomul $-x^2+(2-m)x+m$ are două rădăcini reale distincte şi $f''(x_0)\neq 0$, x_0 critic deci $\Delta=m^2+4>0$, adică $m\in\mathbf{R}$ (se poate arăta că $f''(x_0)\neq 0$).

2.785A Suma valorilor extreme ale funcţiei $f:(-2,2)\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln[x^2(4-x^2)]$ este $m=2\ln 4=4\ln 2$. f este pară, $f'(x)=\frac{4x(2-x^2)}{x^2(4-x^2)}$, puncte de extrem $x=\pm\sqrt{2}$, $f(\pm\sqrt{2})=\ln 4$, $x=0$, $x=\pm 2$ asimptote verticale.

2.786A Fie $a\in\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}\setminus\{a\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-a}$. Cât este a pentru care f admite două puncte de extrem. $f'(x)=\frac{x^2-2ax+2a-5}{(x-a)^2}$ ecuaţia $x^2-2ax+2a-5=0$ are două rădăcini reale distincte dacă $\Delta=a^2-2a+5=(a-1)^2+4>4>0$ deci admite două puncte de extrem pentru $(\forall)a\in\mathbf{R}$.

2.787A Punctele critice ale funcţiei $f(x)=x^2e^x$ (adică punctele pentru care $f'(x)=0$) sunt 0 şi -2, $f'(x)=(x^2+2x)e^x$, deci $x\in\{0,-2\}$.

2.788A Fie $a=\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$. Cât este $a+b$? $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\pi-2\operatorname{arctg}x)}{\ln(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{2}{\ln e}=2$ deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\operatorname{arctg}x)=2$ (vezi 2.648C), deci $a+b=3$.

2.789A Aplicarea teoremei Cauchy pentru funcţiile $f,g:[-1,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=x^3+3x$ şi determinarea punctului c: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c\in(-1,2)$, $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{4+6-(1-3)}{2^3+6+1+3}=\frac{2}{3}=\frac{2c+3}{3c^2+3}\Rightarrow c_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

2.790A Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n, & x\in[-1,0]\\ px^2+4x+4, & x\in(0,1]\end{cases}$. $m,n,p\in\mathbf{R}$. Notăm $S=m+n+p$, m,n,p pentru care f satisface teorema lui Rolle pe $[-1,1]$ şi T mulţimea punctelor c care se obţin aplicând această teoremă. Se cere S şi T. Din continuitatea şi derivabilitatea lui f în 0 obţinem $n=4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x+m)=m=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2px+4)=4$. Dar $f(-1)=1-m+n=f(1)=p+8\Rightarrow m+p-n=-7$ deci $p=-7$. $f'(c)=2c+m=2c+4=0\Rightarrow c=-2\notin[-1,1]$, $f'(c)=2px+4=0$, $c=-\frac{4}{2(-7)}=\frac{2}{7}$. Prin urmare $S=m+n+p=4+4-7=1$, $T=\{\frac{2}{7}\}$.

2.791A Să se determine punctele c din teorema Lagrange pentru funcţia $f(x)=\begin{cases}2x^3+x^2, & x\in[0,1)\\ -2x^2+12x-7, & x\in[1,4]\end{cases}$. Funcţia $f(x)$ verifică condiţiile teoremei, iar $f(4)-f(0)=(4-0)f'(c)\to f'(c)=\frac{9}{4}$. Deci $f'(c)=-4c+12=\frac{9}{4}$ şi $c=\frac{39}{16}$ în $[1,4]$. $f'(c)=6c^2+2c=\frac{9}{4}\Rightarrow c_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{29}{2}}}{6}$ deci $c=\frac{\sqrt{58}-2}{12}$.

2.792A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\left(\frac{x^{n-1}+x^{n-2}\sin x+\ldots+x\sin^{n-2}x+\sin^{n-1}x}{x^{n-1}}\right)=$
$n\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=n\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=n\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{n}{6}$.

2.793A Se poate aplica teorema lui Rolle pe [0,2] pentru funcţia $f(x)=\begin{cases}a\ln(1+x), & x\in[0,1)\\ 2x^2+x+b, & x\in[1,2]\end{cases}$? Continuitatea şi derivabilitatea în $x=1$ ne dau $a\ln 2=3+b$, $f'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{a}{1+x}=\frac{a}{2}=(4x+1)|_{x=1}=5$ deci $a=10$, $b=10\ln 2-3$. Dar condiţia $f(0)=0=f(2)=10+b$ nu este satisfăcută.

2.794A Funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x^3}$ are în punctul $x=3$ un maxim: $f'(x)=2\frac{3-x}{x^4}$, $f'(x)>0$ pentru $x<3$ şi $f'(x)<0$ pentru $x>3$.

2.795A Se cere numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^3-3x-10=0$. Formăm şirul lui Rolle: $f(x)=x^3-3x-10$, $f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$, $f(-\infty)=-\infty$, $f(-1)=-8$, $f(1)=-12$, $f(+\infty)=+\infty$ deci are o singură rădăcină reală mai mare decât 1.

2.796A Să se determine numărul soluţiilor reale şi intervalele în care se află ele pentru ecuaţia $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2-1=0$; şirul lui Rolle: $4x^3+4x^2-8x=0$, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $f(-\infty)=+\infty$, $f(-2)=-\frac{32}{3}-1$, $f(0)=-1$, $f(1)=-\frac{8}{3}$, $f(+\infty)=+\infty$, deci $x_1\in(-\infty,-2)$, $x_2\in(1,\infty)$.

2.797A Funcţia $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ este concavă pe $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$ deoarece $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\frac{-2}{1+x^2}, x<0\\ \frac{2}{1+x^2}, x>0\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}\frac{4x}{(1+x^2)^2}, x<0\\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, x>0\end{cases}$, $f'(x), f''(x)$ nu există în $x=0$, deci $f''(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

2.798A $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\ln^2 2}=0$ deci $a+b=\frac{1}{2}$.

2.799A Fie $f(x)=mx-\ln(1+x^2)$ $\forall x\in\mathbf{R}$ şi $A=\{m\in\mathbf{R}|f$ este crescătoare$\}$. Atunci $A=[1,\infty]$ deoarece $f'(x)=m-\frac{2x}{1+x^2}\geq 0$, $-1\leq\frac{2x}{1+x^2}\leq 1\Rightarrow 1\leq m$.

2.800B $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\ln x$ are un singur punct de extrem $x=\frac{1}{e}$ deoarece $f'(x)=1+\ln x=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ şi $f'(x)>0$, $x>\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, $x<\frac{1}{e}$.

2.801B Cât sunt $a,b\in\mathbf{R}$ astfel ca graficele funcţiilor $f(x)=ax^2+bx+2$ şi $g(x)=1-\frac{1}{x}$ să aibă tanentă comună în $x=1$. $g(1)=0=f(1)=a+b+2$, $g'(1)=\frac{1}{x^2}|_{x=1}=1=f'(1)=(2ax+b)|_{x=1}=2a+b$ de unde $a=3$, $b=-5$.

2.802B Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, x\in[-1,0]\\ 1+\ln(x^2+1), x\in(0,1]\end{cases}$ unde $a,b\in\mathbf{R}$ sunt astfel încât lui f i se poate aplica teorema lui Rolle pe $[-1,1]$ şi $S=a+b+c$. Cât este S? Continuitatea şi derivabilitatea lui f în 0 precum

şi condiţia $f(-1)=f(1)$ ne dau: $f(0)=1=c$, $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2x}{1+x^2}=$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2ax+b)=b$, $f(-1)=a-b+c=f(1)=1+\ln 2$ deci $S\in\left[\frac{5}{3},\frac{7}{4}\right]$.

2.803B Fie M mulţimea valorilor $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $\frac{1}{3}x^3+x^2-x-2\ln x+m=0$ admite două soluţii distincte reale; cât este M?. $(\frac{1}{3}x^3+x^2-x-2\ln x+m)'=x^2+2x-1-\frac{2}{x}=\frac{(x+2)(x^2-1)}{x}=0$ deci $x_1=1$ (-2 şi -1 nu convin). $f(+0)=\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ (deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$), $f(1)=\frac{1}{3}+m<0$, deci $m<-\frac{1}{3}$.

2.804B Se cere $a,m,n\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţiei $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+ax, & x\in[0,1]\\ x^3+mx^2+nx, & x\in(1,2]\end{cases}$ să i se poată aplica teorema Rolle pe $[0,2]$. Notăm $M=\{c\in(0,2), c$ din teorema Rolle$\}$, $\lambda=\sum\limits_{c\in M}$; cât este λ? Se procedează ca în 2.802B: $f(1)=a+1=1+m+n$, $f'(1)=2+a=3+2m+n$, $f(0)=0=f(2)=8+4m+n\Rightarrow a=m=-1$, $n=0$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in[0,1]\\ x^3-x^2, & x\in(1,2]\end{cases}$, $f(2)-f(0)=(2-0)f'(c)\Rightarrow f'(c)=2=$
$\begin{cases}2c-1, & x\in(0,1)\\ 3c^2-c, & x\in(1,2)\end{cases}$; $c=\frac{3}{2}$ şi $c=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ nu convin, $c=\frac{1+\sqrt{7}}{3}=\lambda$.

2.805B. Ecuaţia $2\ln x=mx^2+1$ are două soluţii reale pentru $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$: $f(x)=2\ln x-mx^2-1$, $x>0$, $f'(x)=2\frac{1-mx^2}{x}=0\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $m>0$ este punct de maxim, $f(+0)=-\infty$, $f(\infty)=-\infty$, deci trebuie ca $f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=-\ln m-2>0$, $m<\frac{1}{e^2}$, $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$.

2.806B Fie $f:[a,b]\to[a,b]$, f continuă surjectivă. Atunci există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=c$. Notăm $g(x)=x-f(x)$ şi avem $g(a)=a-f(a)<0$, $g(b)=b-g(b)>0$, g continuă, şi conform proprietăţii lui Darboux rezultă că există $c\in[a,b]$ astfel ca $g(c)=0$, deci $f(c)=c$.

2.807B Fie $f,g:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$. Atunci $f(x)-g(x)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)}}}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}=\frac{1}{1+x^2}$, $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, deci $(f(x)-g(x))'=0\Rightarrow f(x)-g(x)=k$ şi dăm valoarea $x=0$ obţinem $f(0)-g(0)=0=k$.

2.808B Dacă $f,g:[0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$, atunci

$f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{4}$; $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{4x^2}}=\frac{-1}{1+x^2}$; $g'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$, $(f(x)-g(x))'=0\Rightarrow f(x)-g(x)=c$, $f(1)-g(1)=-\frac{\pi}{4}=c$.

2.809B Dacă $f(x)=x\ln x+ax^3$, $x>0$ şi $A=\{a\in\mathbf{R}|f$ are două puncte de inflexiune $\}$, atunci $A=\emptyset$: $f'(x)=1+\ln x+3ax^2$, $f''(x)=\frac{1}{x}(1+6ax^2)=0\Rightarrow x^2=-\frac{1}{6a}$ deci $a<0$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{-6a}}$. Dar $x>0$, deci avem un singur punct de inflexiune, iar $A=\emptyset$.

2.810B Funcţiile $f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $g(x)=\arcsin x+\arccos x$, $x\in[-1,1]$ sunt constante şi egale ambele cu $\frac{\pi}{2}$; $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=0$, $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ deci $f(x)=k$, $g(x)=k_1$, dar în $x=1$ iau valorile $\frac{\pi}{2}$, $f(1)=2\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{2}$, $g(1)=\frac{\pi}{2}$ de unde $k=k_1=\frac{\pi}{2}$.

2.811B Folosind monotonia funcţiei $f(x)=x\ln x$, $x>0$, să se pună în ordine crescătoare numerele $a=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}$, $b=(\frac{8}{5})^{\frac{8}{5}}$, $c=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. $f'(x)=1+\ln x>0$ dacă $\ln x>-1=\ln\frac{1}{e}$ deci $x>\frac{1}{e}$ şi f crescătoare pentru $x>\frac{1}{e}$. Din $\sqrt{2}=1,4\ldots<\frac{3}{2}=1,5<\frac{8}{5}=1,6$ rezultă $c<a<b$.

2.812B $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=0^{+\infty}=0$ ($0^{+\infty}$ nu este nedeterminare).

2.813B Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin^n x\cos x$, $n\geq 2$ şi $M_n=\max\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}M_n$. $f'(x)=n\sin^{n-1}x\cdot\cos^2x-\sin^{n+1}x=\sin^{n-1}x(n\cos^2x-\sin^2x)\Rightarrow\operatorname{tg}^2x=n$; $(\operatorname{tg}^2x_0=n)$, $M_n=(\sin^2x_0)^{\frac{n}{2}}(\cos^2x_0)^{\frac{1}{2}}=$

$$=\left(\frac{\operatorname{tg}^2x_0}{1+\operatorname{tg}^2x_0}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2.814B Ecuaţia $x^3-3x+m=0$, $m\in\mathbf{R}$ nu are două soluţii distincte în [0,1]. $f'(x)=3(x^2-1)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$, $f(-1)=m+2>0$, $f(1)=m-2<0$ deci trei soluţii avem când $-2<m<2$ şi o soluţie dacă $m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. În $[-1,1]$, deci şi în [0,1], avem ori o soluţie ori nici una.

2.815B Fie $f(x)=x^3-3x^2+2x$. Există o infinitate de puncte $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1\neq x_2$ astfel încât $f'(x_1)=f'(x_2)$ şi un punct $x_0\in\mathbf{R}$ astfel încât $f(x_0+x)=-f(x_0-x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Care sunt valorile lui x_0 şi $s=x_1+x_2$?. $f(x)=x(x-1)(x-2)$ este simetrică faţă de un punct, $x_0=1$, $y_0=0$ deci $f(1+x)=-f(1-x)$. În punctele $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ simetrice faţă de (1,0) pantele tangentelor la curbă sunt egale, $f'(x_1)=f'(x_2)\Rightarrow(x_1-x_2)[(x_1+x_2)-2]=0$, dar acestea verifică relaţia $x_1+x_2=2$. Poate fi folosită şi teorema Lagrange pe intervale $[a,b]=[1-m,1+m]$ simetrice faţă de 1, eventual făcând o translaţie $t=x-1$ şi obţinem $y=x(x^2-1)$ simetrică faţă de (0,0).

2.816B Punctele de extrem ale funcţiei $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$ sunt $x=0$ şi $x=2$, iar $x=0$ este şi punct unghiular; $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ $(x\geq 0)$ se anulează în 0 şi 2; 0 este punct de minim şi 2 punct de maxim.

2.817B Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ şi x_1,x_2,x_3 abscisele punctelor sale de extrem. Să se determine $E=\sum\limits_{j=1}^{3}x_jf(x_j)$.

$$f(x)=\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{3}{2}\right]\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)-\tfrac{3}{2}\right]\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\right]\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\right]=$$
$$=\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\right]\left[\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^4-\tfrac{10}{4}\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{9}{16};\ f'(x)=$$
$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^3-5\left(x-\tfrac{3}{2}\right)=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left[4\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-5\right];\ x_1=\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2},\ x_2=\tfrac{3}{2},$$
$$x_3=\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2},\ f(x_1)=f(x_3)=-1,\ f(x_2)=\tfrac{9}{16},\ E=\sum_{j=1}^{3}x_jf(x_j)=-\frac{69}{32}.$$

2.818B Să se afle aria laterală a conului de volum maxim înscris în sfera de rază R. Notăm raza bazei conului cu x distanţa de la centrul sferei la baza conului cu h: $h=\sqrt{R^2-x^2}$, $V=\frac{\pi x^2(R+h)}{3}=\frac{\pi}{3}x^2(R+\sqrt{R^2-x^2})=f(x)$, $f'(x)=\frac{x[2(R+\sqrt{R^2-x^2})\sqrt{R^2-x^2}-x^2]}{\sqrt{R^2-x^2}}=0$ punctul de maxim este $x_0^2=\frac{8}{9}R^2$, $h=\frac{R}{3}$, aria laterală $S=\pi x_0G$, $G=\sqrt{x_0^2+h^2}=2R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S=\frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}$.

2.819B Să se afle valorile lui m pentru care funcţia $f(x)=\frac{(m-1)e^x-me^{-x}}{1+e^x}$ este monotonă pe tot domeniul său de definiţie:

$f'(x)=\frac{[(m-1)e^x+me^{-x}](1+e^x)-e^x[(m-1)e^x-me^{-x}]}{(1+e^x)^2}=\frac{(m-1)e^{2x}+2me^x+m}{e^x(1+e^x)^2}$ de unde $(m-1)e^{2x}+2me^x+m>0\Rightarrow m(e^{2x}+2e^x+1)>e^{2x}$ deci $m>\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2$, f este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$ pentru $m\geq 1$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$) şi monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$ pentru $m\leq 0$, deci $m\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

2.820B Funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ este constantă pe porţiuni: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2}\cdot\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ deci $f(x)=$

k_1, k_2, $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1 \end{cases}$ deci f este constantă pe porţiuni.

2.821B Punctele de extrem ale funcţiei $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$:

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1}, & x \le 0 \\ xe^{x-1}, & 0 < x \le 1 \\ xe^{1-x}, & 1 < x \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{x-1}, & x \in (-\infty, 0) \\ (x+1)e^{x-1}, & x \in (0,1) \\ (1-x)e^{1-x}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-\frac{1}{e}\|\frac{1}{e}$	$+++$	$2\|0$	$---$	
$f(x)$	0	$\uparrow$	1^{-2}	$\downarrow$	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

Deci f admite punctele de extrem $-1, 0, 1$, în 0 şi 1 f nu este derivabilă şi sunt puncte unghiulare.

2.822B Să se determine punctele c din teorema Rolle pentru $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, 3\pi]$. $f'(c) = \cos c = 0$, deci punctele c sunt $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ sau altfel scris $c \in \{\pm\frac{\pi}{2}, 2\pi \pm \frac{\pi}{2}\}$.

2.823B Să se determine parametrii reali m, n, p astfel ca funcţiei $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0) \\ px^2 + 4x + 4, & x \in [0, 1] \end{cases}$ să i se poată aplica teorema Rolle.

Condiţiile sunt: continuitate şi derivabilitate în 0 şi $f(-1) = f(1)$. $f_s(0) = n = f_d(0) = 4$, $f'_s(0) = m = f'_d(0) = 4$, iar $f(-1) = 1 - m + n = 1 = f(1) = p + 8 \Rightarrow p = -7$.

2.824B Să se determine parametrul real m astfel ca ecuaţia $x^3 + 3x^2 - mx + 5 = 0$ să aibă trei soluţii reale distincte. Separăm pe m, $\frac{x^3+3x^2+5}{x} = m$, reprezentăm grafic funcţia $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5}{x}$, $x \neq 0$ şi-i alegem pe acei m pentru care dreptele $y = m$ taie în trei puncte graficul lui f. $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+5x+5)}{x^2}$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 1$ $(x \neq 0)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$, $x = 0$ asimptotă verticală $f_s(0) = -\infty$, $f_d(0) = +\infty$, punctul $(1, 9)$ este punct de minim $f(-\infty) = f(+\infty) = +\infty$ deci pentru $m > 9$ avem trei soluţii reale distincte.

2.825B Ce valori ia m pentru ca ecuaţia $x^3 - x^2 - x + m = 0$ să aibă trei rădăcini reale distincte. $f(x) = x^3 - x^2 - x + m$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ pentru $x_1 = 1$ şi $x_2 = -\frac{1}{3}$; $f(-\frac{1}{3}) = m + \frac{5}{27}$, $f(1) = m - 1$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ deci trebuie ca $m + \frac{5}{27} > 0$ şi $m - 1 < 0$, deci $-\frac{5}{27} < m < 1$ (şirul lui Rolle $(-, +, -, +)$).

2.826B Care sunt punctele c din teorema (formula) Lagrange $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ pentru funcţia $f(x) = x + \sin x$ pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$. $f(2\pi) - f(-2\pi) = [2\pi - (-2\pi)]f'(c)$, $4\pi = 4\pi[1 + \cos c] \Rightarrow \cos c = 0$ deci $c \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$.

2.827C Aflaţi $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $2x + \ln x - \lambda(x - \ln x) = 0$ să aibă două soluţii reale şi distincte. $\lambda = \frac{2x+\ln x}{x-\ln x} = f(x)$, graficul lui $f(x)$ îl intersectăm cu dreptele $y = \lambda$. $x - \ln x \neq 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}_+^* = (0, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 2$, $\lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = -1$, $f'(x) = \frac{3(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$, $f'(x) > 0$ în $(0, e)$, $f'(x) < 0$ în (e, ∞), f are un maxim în $x = e$, $f(e) = \frac{2e+1}{e-1} > 2$, asimptotă orizontală $y = 2$, verticală nu are, există x_0, $0 < x_0 < e$ cu $f(x_0) = 0$ $(\ln x_0 = -2x_0)$.

	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+++$	0	$---$	0
$f(x)$	-1	$\uparrow$	$\frac{2e+1}{e-1}$	$\downarrow$	2

Se observă că pentru $2 < \lambda < \frac{2e+1}{e-1}$ avem două soluţii distincte.

2.828C $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2} + \frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(x-1)+x+1}{2x^2e^{2x}-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+2e^{2x}(x-1)+1}{4xe^{2x}+4x^2e^{2x}-4x} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}+4e^{2x}(x-1)}{4[e^{2x}(2x^2+4x+1)-1]} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x^2+4x+1-e^{-2x}} = \frac{1}{6}$.

2.829C Să se calculeze $S_n = \sum_{k=1}^{n}[f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)]$ pentru $f : (0, 2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2+2x}$. Evident $S_n = f'(1) - f^{(k+1)}(1)$ şi $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Se ştie că $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(x+a)^{k+1}}$ (se arată prin inducţie) deci $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\left[\frac{1}{x^{n+2}} - \frac{1}{(x+2)^{n+2}}\right]$, $f^{(n+1)}(1) = (-1)^{n+1}(n+1)!\left[1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right]$, $f'(1) = -1 + \frac{1}{9} = -\frac{8}{9}$ deci $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n+1)!\left[1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right]$.

2.830C Funcţia $f(x) = |x|(x^2-1)$ are trei puncte de extrem local $-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & x > 0 \\ -x^3 + x, & x \le 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x > 0 \\ \text{nu există în} & x = 0 \\ -3x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}; \quad f'_s(0) = 1,$$

$f'_d(0) = -1$, $f(0) = 0$, 0 fiind unghiular, f este pară (simetrie faţă de Oy).

2.831C Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu derivata continuă şi injectivă pe $[a, b]$. Dacă se aplică teorema Lagrange lui f pe intervalul $[a, x]$, $x \in (a, b]$, valoarea lui c care se obţine depinde de x şi o notăm cu $c(x) = c_x$. Să se calculeze $\lim_{x\to a} c(x)$. R. $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c_x)$, $a < c_x < x$. Dar f' este continuă

deci $f'(c_x) \to f'(a)$ pentru $x \to a$, $c_x \to a$ şi fiind injectivă, trecând la limită în inegalitatea $a < c_x < x$, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$.

2.832C Pentru funcţiile $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, $h(x) = x - \frac{x^2}{2}$ să se stabilească ordinea $h < g < f$. Evident $h(x) = x - \frac{x^2}{2} < f(x) = x$. Fie $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) < 0$ pe $(-1,0)$ deci φ descreşte, iar pe $(0,\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, φ creşte, prin urmare $\varphi(x) \geq 0$, $f \geq g$. Să arătăm $g \geq h$: $\psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x} + (x-1) \geq 0$, ψ creşte, deci $\psi(x) \geq 0$, prin urmare $h \leq g \leq f$. Deoarece $x > 0$ rezultă $h < g < f$.

2.833C Să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$. Avem $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (prin inducţie), $f^{(n)}(0) = n!$.

2.834C Găsiţi care din funcţiile derivabile de mai jos satisfac egalitatea $f(x+y) = f(x) + f(y)$: a) e^x; b) ax; c) $\ln x$; d) $ax + b$; e) $\sin x$; f) $\cos x$. Verificând cele şase funcţii din grilă observăm că verifică b): $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$. Se poate determina funcţia care verifică egalitatea: $f(0+0) = f(0)+f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(y+x) - f(y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ deci $f'(y) = f'(0) = a \Rightarrow f(y) = ay + c$ etc.

2.835C Fie $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, derivabilă astfel încât $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,\infty)$; să se arate că f este identic nulă. Dacă nu ar fi identic nulă, $f(0) = 0$ şi $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare deci $f(x) \geq 0$; dacă există x_0, unde $f(x_0) > 0$, pentru a avea $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ ar trebui ca începând cu un x_1 să fie descrescătoare, fals.

2.836C Se consideră o funcţie continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi o funcţie derivabilă $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ astfel încât $x'(t) = f(x(t)) - 1$, $\forall t \in [0,\infty)$ şi $l = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ există şi este finită, iar $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Să se calculeze $f(l)$. Avem $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} f(x(t)) - 1 = f(\lim\limits_{t\to\infty} x(t)) - 1 = f(l) - 1 = 0$ deci $f(l) = 1$.

2.837C Pentru ce valori ale parametrului real m, ecuaţia $\sin 2x + 2\sin x = m$ are două soluţii reale în $(0, 2\pi)$. Intersectăm graficul lui $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ cu $y = m$; $f'(x) = 2\cos 2x + 2\cos x = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \pi$ este punct de inflexiune, iar $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$ sunt puncte de extrem cu $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ valorile extreme. Deci pentru $m \in \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ avem două rădăcini; pentru $m = 0$ o singură rădăcină $x = \pi$.

2.838C Funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă, strict crescătoare şi are asimptota orizontală $y = a$. Funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ este continuă, strict descrescătoare şi are asimptota orizontală $y = b$. Ştiind că $a > b$ precizaţi numărul n de rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$, $x \in (0,\infty)$. Uşor rezultă grafic, că nu există nici o rădăcină când $f_d(0) > g_d(0)$ şi o rădăcină când $f_d(0) < g_d(0)$. Analitic, folosim $h(x) = f(x) - g(x)$ care nu are schimbarea de semn pe $(0,\infty)$ pentru $f_d(0) > g_d(0)$ şi are o schimbare de semn pentru $f_d(0) < g_d(0)$ ($f_d(0), g_d(0)$ limitele la dreapta).

2.839C Să se determine m astfel încât ecuaţia $x^2 - \ln x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale. Procedăm ca în 2.837C, intersectând graficul funcţiei $f(x) = -2\ln x + x^2$ cu $y = -m$ sau folosim şirul lui Rolle. $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{x^2-1}{x} = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$, deci $x_1 = 1$, $f(1) = 1 + m$, $f(+\infty) = f(-\infty) = +\infty$ deci pentru a avea două rădăcini este necesar ca $f(1) = m + 1 < 0$, $m < -1$.

2.840C Numărul n al punctelor de extrem şi m al punctelor de inflexiune al funcţiei $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ este $n = 0$, $m = 1$: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 2\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right)$, $f''(x) = 6\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right)$, $f'(x) = -2 \cdot \frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$, $f''(x) = 6 \cdot \frac{4x^3+6x^2+4x+1}{x^4(x+1)^4}$, $f'(x) = 0$ nu are rădăcini reale iar $f''(x) = 0$ are o singură rădăcină reală ($(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)' = 12x^2 + 12x + 4 > 0$) deci $n = 0$, $m = 1$.

2.841C Să se determine mulţimea punctelor $(m,n) \in \mathbf{R}^2$ (din planul variabilelor m, n) pentru care ecuaţia $x^3 - 3x + m^2 + n^2 - 7 = 0$ are trei rădăcini reale distincte. Aplicăm şirul lui Rolle cu doi parametri m şi n. $f(x) = x^3 - 3x + m^2 + n^2 - 7$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$, $f(-1) = m^2 + n^2 - 5$, $f(1) = m^2 + n^2 - 9$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ deci condiţia este $f(-1) = m^2 + n^2 - 5 > 0$, $f(1) = m^2 + n^2 - 9 < 0$, deci $5 < m^2 + n^2 < 9$ o coroană circulară în planul variabilelor m, n.

2.842C Fie $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1}$, $x \neq -1$ şi $A = \{x, x \in \mathbf{R} | x$ este abscisa unui punct de extrem local al lui $f\}$, $B = f(A)$. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1}, & x \leq 0 \\ \frac{e^x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}, & x \neq -1 \\ \frac{xe^x}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$ deci $x = -2$ este punct de extrem, iar $x = 0$ este punct unghiular ($f'_s(0) = -2$, $f'_d(0) = 0$) şi punct de extrem $f(-2) = -e^2$, $f(0) = 1$ deci răspunsul este $B = \{-e^2, 1\}$.

2.843C Fie $f(x) = \frac{x^2+ax+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $a \in \mathbf{R}$, $A = \{a \in \mathbf{R}, f(\mathbf{R}) = [0,\infty)\}$ şi $S = \sum\limits_{a\in A} a$. Cât este S? Evident $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Condiţia $f(\mathbf{R}) = [0,\infty)$ este verificată dacă $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ (condiţie necesară pentru ca $x^2 + ax + 1 \geq 0$). Dar dacă $a \neq \pm 2$, $f(x) > 0$, prin urmare $a = \pm 2$, $f(x) = \frac{(x\pm 1)^2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$,

$f(\pm 1) = 0$ şi $S = 2 - 2 = 0$.

2.6. Grafice de funcţii

2.844C Să se determine punctele $M(x_0, y_0)$ în care funcţiile $f(x) = e^x - 1$ şi $g(x) = \ln(x+1)$, $x \in (0, \infty)$ au graficele tangente. $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f'(0) = 1 = g'(0) = 1$; deci sunt tangente în (0,0) şi tangente în (0,0) la prima bisectoare $y = x$. ($f''(x) = e^x > 0$, $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$).

2.845A Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$, $x \neq 1$ să treacă prin $(2, 8)$, iar tangenta în $x = 2$ la grafic să fie paralelă cu dreapta $y = -3x + 1$. $f(2) = 8 \to 2a + b = 4$, $f'(x) = \frac{x^2+x(a-2)-a-b}{(x-1)^2}$, $f'(2) = a - b = -3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{10}{3}$.

2.846A Fie $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în $x = 2$: $f(2) = \sqrt{5}$, $f'(2) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}\Big|_{x=2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ deci ecuaţia este $y - \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}(x - 2)$.

2.847A Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ ştiind că dreapta $y = mx + 4$ este tangentă la curba dată de $y = 2x^3 + 4x$. Fie (x_0, y_0) punctul de tangenţă. Condiţiile se scriu $f'(x_0) = 6x_0^2 + 4 = m$, $y_0 = mx_0 + 4$, $y_0 = 2x_0^3 + 4x_0 \Rightarrow y_0 = x_0(6x_0^2 + 4) + 4 = 2x_0^3 + 4x_0$ deci $4x_0^3 + 4 = 0$ şi $x_0 = -1$ iar $m = 10$.

2.848A Să se determine abscisele punctelor de pe graficul funcţiei $y = x + \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$ unde tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta $y = \sqrt{3}x$. $y' = 1 + \cos x = \sqrt{3}$, $\cos x = \sqrt{3} - 1$, $x = \pm \arccos(\sqrt{3} - 1)$.

2.849A Tangenta la curba $y = x^2 - x$ în punctul $A(1, 0)$ are ecuaţia $y = x - 1$; $y'(1) = (2x - 1)|_{x=1} = 1 = m$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ecuaţia $y - y_0 = m(x - x_0)$ devine $y = x - 1$.

2.850A Se consideră semicercul $y = \sqrt{4 - (x-1)^2}$, $x \in [-1, 3]$ şi punctele de pe cerc de abscisă $1 - a$, $1 + a$, unde tangentele la semicerc sunt paralele cu prima bisectoare $y = x$ respectiv cu a doua bisectoare $y = -x$. Se cere a. $y' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \pm 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 2$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$, $a = \sqrt{2}$. Se poate rezolva şi cu geometrie analitică.

2.851A Pentru $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$, $f(x) = \left|\frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}\right|$ punctele $x = \pm 1$ sunt puncte unghiulare. Se vede uşor pe grafic. Se face întâi graficul $y = \frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}$ care fiind pară, $f(-x) = f(x)$ este suficient să facem numai pentru $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$. $f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)} > 0$. f creşte pe fiecare interval $(0, \frac{1}{e})$ şi $(\frac{1}{e}, \infty)$, $f_d(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ asimptotă orizontală, $x = \frac{1}{e}$ asimptotă verticală, $f_s(\frac{1}{e}) = +\infty$, $f_d(\frac{1}{e}) = -\infty$, $f'_d(0) = \infty$, 0 este punct de întoarcere, $f'_s(1) = -1$, $f'_d(1) = 1$, $f(1) = 0$ deci $x = 1$ este punct unghiular şi prin simetric şi $x = -1$.

2.852A Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şi $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală pentru f şi g, $x = 0$ este asimptotă verticală pentru g şi punct de minim pentru f. R. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală. $\lim_{x\to 0} g(x) = e^\infty = \infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală pentru g. Mai avem $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} = \lim_{t\to\infty} 2\frac{t^3}{e^{t^2}} = 0$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$, $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, deci $x = 0$ este punct de minim pentru f.

2.853A Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$, $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim şi f este convexă. Într-adevăr, $f'(x) = 1 + \ln x < 0$ pentru $x < \frac{1}{e}$, $f'(x) > 0$ pentru $x > \frac{1}{e}$, $f'(\frac{1}{e}) = 0$ deci $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim. Dar $f''(1) = \frac{1}{x} > 0$ deci f este convexă.

2.854A Pentru funcţia $f(x) = x\text{arctg}x$, $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ sunt asimptote oblice. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \text{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) \mp \frac{\pi}{2}x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(\text{arctg}x \mp \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{arctg}x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, deci $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ sunt simptote oblice la $+\infty$ respectiv $-\infty$.

2.855A Punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ sunt $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$: $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x(1 + x^2)e^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2}$, $f''(x) = -6x^2e^{-x^2} + 4x^4e^{-x^2} = 2x^2(2x^2 - 3)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, f'' îşi schimbă semnul în $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ şi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ deci $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sunt puncte de inflexiune.

2.856A Funcţia $f(x) = \frac{x}{2} + \text{arctg}x$ are punct de inflexiune $x = 0$; $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) = 0$ ($f(x) > 0$ cu $x < 0$ şi $f(x) < 0$, $x > 0$).

2.857A Ecuaţia $\frac{|\ln x|}{x} = m$ are trei rădăcini pentru $0 < m < \frac{1}{e}$. Se poate aplica şirul lui Rolle sau intersectăm graficul funcţiei $y = \frac{|\ln x|}{x}$, $x > 0$ cu $y = m$: luăm întâi $y = \frac{\ln x}{x}$ şi pentru $0 < x < 1$ construim simetricul graficului faţă de Ox. $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$ pentru $x = e$. Tabloul de valori

	0		1		e		∞
$f'(x)$	+	+ + +	1	+ + +	0	− − −	
$f(x)$	$-\infty$	↑	0	↑	$\frac{1}{e}$	↓	0

Rezultă că pentru $0 < m < \frac{1}{e}$ ecuaţia $\frac{|\ln x|}{x} = m$ are trei rădăcini.

2.858A Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care funcţia $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2-1}}$ admite asimptotă oblică $y = x + 1$ (la $+\infty$) iar $x = 2$ este punct de extrem. $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2})}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax+b-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a+\frac{b}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = a = 1$,

$f'(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-1}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2+x+b)}{x^2-1} = \frac{x^3-x(2+b)-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = 0$ pentru $x = 2$ deci $8 - 2(2 + b) - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$.

2.859A Ecuaţia $x + \sqrt{x^2+2x} = m$ are soluţii pentru $m \in [-2, -1) \cup [0, \infty)$. Notăm $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$ domeniul de definiţie $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f(x) < 0$, $x < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t=-x\to\infty}(\sqrt{t^2-2t} - t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t} = -1$; $f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$; $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$ iar pentru $x < 0$ avem $x = -t$, $t > 0$, $\sqrt{t^2-2t} + 1 - t = 0$, $t^2 - 2t = t^2 - 2t + 1$ imposibil, deci $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$	− − −	− − −	|	|	+ + +	+ + +
$f(x)$	-1	↓	-2	0	↑	∞

Deci pentru $m \in [-2, -1) \cup [0, \infty)$ ecuaţia are soluţie (o singură soluţie).

2.860A Ecuaţia $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = m$ are soluţii pentru orice $m \in \mathbf{R}$ deoarece $f(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$ are derivata $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} > 0$ deci f este crescătoare strict de la $-\infty$ la $+\infty$ ($f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = \infty$) şi $y = m$ intersectează graficul lui f într-un singur punct $\forall m \in \mathbf{R}$. Altfel: $\operatorname{Im} f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2.861A Să se determine parametrii reali a, b pentru care funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+b}{x-1}$ are tangenta la grafic în $x = 2$, dreapta $y = -2x + 13$. R. $y = f(2) = 4a + b = -4 + 13 = 9$ şi $f'(x) = \frac{ax^2-2ax-b}{(x-1)^2}$, $f'(2) = -2 = 4a - 4a + b = b$, deci $b = -2$, $a = \frac{7}{4}$.

2.862A Graficul funcţiei $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ are $x = 0$ punct unghiular şi $y = \pi$ asimptotă orizontală. R. $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(-1) = \pi$. f este pară, domeniul de definiţie este $\mathbf{R}$ ($-1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$), $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{x}{|x|}$, $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$, $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f'_s(0) = -2$, $f'_d(0) = 2$ deci $x = 0$ este punct unghiular.

2.863A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ are un singur punct de inflexiune, $x = 0$; $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$, $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$ pentru $x \in (-1, 0)$ şi $f''(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$ deci $x = 0$ este punct de inflexiune, unic.

2.864A Funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - \ln(1 + x)$ este crescătoare pe $(0, \infty)$ deoarece $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} > 0$ pe $(0, \infty)$ ($e^x > \frac{1}{x+1}$ se observă grafic comparând $y = e^x$ cu $y = \frac{1}{1+x}$).

2.865A $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ este crescătoare pe orice interval care nu conţine pe 0, deoarece $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$ deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$, deci şi pe orice interval $I \subset (-\infty, 0)$ sau $I \subset (0, \infty)$.

2.866A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ este descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, 1), (1, \infty)$ deoarece $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$, $x \neq 1$.

2.867A Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$: $f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$, $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ deci pe $(1, \infty)$, $f'(x) > 0$ şi f este strict crescătoare.

2.868A Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = xe^{\frac{x^2+1}{x}}$ este strict descrescătoare pe intervalele $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ şi $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ deoarece $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}}\frac{x^2+x-1}{x}$ şi $g(x) = \frac{x^2+x-1}{x} < 0$ pe cele două intervale.

2.869A Mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$ este intervalul $[-\frac{1}{3}, 5]$: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$, $y = 1$ asimptotă orizontală, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $x = -1$ este punct de minim, $f(-1) = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ este punct de maxim, $f(1) = 5$, deci $\operatorname{Im} f$ care este proiecţia graficului pe Oy este intervalul $[-\frac{1}{3}, 5]$. Altfel, pentru $\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1} = y$, $x^2(1-y)+x(3+y)+1-y = 0$, $\Delta_y = (y+3)^2 - 4(1-y^2) \ge 0 \Rightarrow y \in [-\frac{1}{3}, 5]$.

2.870A Fie $f : [1, \sqrt{e}) \to I$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Găsiţi pe I astfel încât f să fie inversabilă. De fapt se cere imaginea lui $[1, \sqrt{e})$ (mulţimea valorilor) funcţiei f. Deoarece $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, pe intervalul $[1, \sqrt{e}]$ f este crescătoare ($f'(x) > 0$ pe $[1, \sqrt{e}]$, $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$, $f(1) = 0$ deci $I = [0, \frac{1}{2e}]$.

2.871A Abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f(x) = x^3 - 3x$ sunt evident $x = \pm 1$ deoarece $f'(x) = 3(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ iar f' îşi schimbă semnul în ± 1.

2.872A Mulţimea maximală pe care $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ este convexă este $(0, \infty)$ deoarece $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pentru $x > 0$.

2.873A Asimptotele funcţiei $f(x) = \sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}}$ sunt $y = x$ la $+\infty$ şi $y = -x$ la $-\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x^4}}} = \pm 1 = m$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \mp x\right) =$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^6+x}{x^4+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \pm x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - x^2}{(x^4+1)\left(\sqrt{\frac{x^6+x}{x^4+1}} \pm x\right)} = 0.$$

2.874A Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+1}{x^2+b^2}$. Să se găsească toate perechile (a, b) astfel încât graficul funcţiei să treacă prin punctul $(1, 1)$ iar valoarea minimă să fie $\frac{1}{4}$. $1 = \frac{a+1}{1+b^2} \Rightarrow b^2 = a$, $f'(x) = \left(\frac{ax^2+1}{x^2+a}\right)' = \frac{2x(a^2-1)}{(x^2+a)^2} = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ şi $f(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 4$, $b = \pm 2$, deci $(4, 2), (4, -2)$.

2.875A Să se determine punctul x_0 şi ecuaţia tangentei în x_0 astfel încât graficele funcţiilor $f, g : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x^2 + x$ admit aceeaşi tangentă în acelaşi punct x_0. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = 2x + 1$, $\frac{1}{1+x} = 2x+1$, $2x^2+3x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, $x_0 = -\frac{3}{2} \notin (-1, \infty)$, $f'(0) = g'(0) = 1$, $f(0) = g(0) = 0$ deci $y = x$ este tangenta comună în punctul comun $(0,0)$.

2.876A Să se determine m astfel încât graficele funcţiilor $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 2x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să fie tangente. $f'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 4x - 2(m+3)$, $g'(x) = f'(x) \Rightarrow 2x - 4 = 4x - 2(m+3)$ deci $x = m + 1$. În $x = m + 1$, pantele sunt egale şi mai trebuie $f(m+1) = g(m+1)$: $(m+1)^2 - 4(m+1) + 3 = 2(m+1)^2 - 2(m+3)(m+1) + m^2 \Rightarrow m = -2$.

2.877A Câte asimptote are funcţia $f(x) = \frac{x^6}{(x^2-1)(x^2+1)(x^2-4x+3)}$? $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ asimptotă orizontală iar $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 3$ sunt asimptote verticale, deci patru asimptote.

2.878A Determinaţi $A = \{a \in \mathbf{R} |$ graficul funcţiei $f(x) = \frac{ax^3+x^2}{x^2+a}$ are asimptote oblice şi verticale$\}$. R. Asimptota oblică $y = mx+n$, $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =$ a, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2+a} = 1$. Avem asimptote verticale dacă $a < 0$. $A = (-\infty, 0)$.

2.879A Se cere numărul n al punctelor de inflexiune ale funcţiei $f : (-\pi, \pi)$, $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$. R. $f'(x) = \cos x + \cos 3x$, $f''(x) = -\sin x - 3\sin 3x. =$ $\sin x(12\sin^2 x - 10) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, $\sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$, deci $x_1 = 0$, $x_{2,3} =$

$\pm \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$, $x_{4,5} = \pm\pi \mp \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$, deci $n = 5$.

2.880A Punctul $x_0 = 1$ este pentru funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) =$ $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ punct unghiular: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}$; $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$, $x \in [0, 1)$, $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$, $x \in (1, \infty)$ şi nu există pentru $x = 1$, $f'_s(1) = 1$, $f'_d(1) = -1$, deci $x_0 = 1$ este punct unghiular.

2.881A Să se determine o funcţie de forma $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ astfel încât tangenta la grafic în punctul de abscisă $x = 1$ să fie paralelă cu prima bisectoare şi graficul ei să admită dreptele $y = 3$ şi $x = -1$ ca asimptote. R. Fie $f(x) = m\frac{x+a}{x+b}$, $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = m = 3$, $x = -1$ asimptotă verticală implică $b = 1$ iar $f'(x) = \frac{3(1-a)}{(x+1)^2}$, $f'(x) = \frac{3(1-a)}{4} = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$.

2.882A Fie $f : (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Dacă $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, determinaţi $\lambda = m + n$, unde $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax - bx\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x} = a - b = -1,$$

$$1 = \lim_{x\to-\infty}\left((a+1)x + (a+1)\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}\right) = (a+1)\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x\right) =$$

$$(a+1)\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - x} = (a+1)\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-1}{-x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+1\right)(x+1)} =$$

$$\frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a = 1, b = 2; m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{x + 2x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x} = 3,$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - x\right) = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x} =$$

$$2\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} + x\right)} = -1 \text{ deci } m + n = 3 - 1 = 2.$$

2.883B Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2+1}{ax^2+bx}$ trece prin $M(1, 1)$ şi în $x = 1$ are panta tangentei $\frac{1}{2}$. $1 = f(1) = \frac{2}{a+b} \Rightarrow$ $a + b = 2$; $f'(x) = \frac{bx^2-2ax-b}{(ax^2+bx)^2}$, $f'(1) = \frac{-2a}{(a+b)^2} = -\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, $a = -1$, $b = 3$.

2.884B Tangenta la graficul lui $f(x) = \frac{x^3+3}{x}$, $x \neq 0$ în $x = -2$ taie a doua oară graficul în P. Se cere panta tangentei în P la grafic. R. $f(-2) = \frac{5}{2}$, $f'(-2) = \frac{2x^3-3}{x^2}\Big|_{x=-2} = -\frac{19}{4}$, dreapta $y - \frac{5}{2} = -\frac{19}{4}(x+2)$, $y = -7 - \frac{19}{4}x$ o intersectăm cu graficul lui f, $x^3 + 3 = -7x - \frac{19}{4}x^2$, $4x^3 + 19x^2 + 28x + 12 = 0$,

$x_0 = -2$ rădăcini dublă, $x_1 = -\frac{3}{4}$, $m = -\frac{41}{6} = f'(-\frac{3}{4})$.

2.885B Fie $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$. Dacă $M = \{x_0 \in (0,\infty) |$ dreapta tangentă la graficul lui f în x_0 trece prin $A(2,1)\}$, se cere $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$. R.

Unul din punctele x_0 este, evident, $x_0 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$, $y = x - 1$ trece prin $A(2,1)$. Cealaltă dreaptă tangentă este $y - 1 = (1 + \ln x_0)(x - 2)$ şi avem evident $1 + (1 + \ln x_0)(x_0 - 2) = x_0 \ln x_0$ deci $x_0 = 2 \ln x_0 + 1$. Folosind semnul funcţiei $g(x) = 2 \ln x + 1 - x$, observăm că $g(3) = 2 \ln 3 - 2 > 0$, $g(4) = 2 \ln 4 - 3 < 0$ deci $x_0 \in (3,4)$, iar $S = \in (4,5)$.

2.886B Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1 - \frac{1}{ax}$ şi A mulţimea acelor $a \neq 0$ pentru care graficele celor două funcţii admit o tangentă comună într-un punct comun. Se cere A. R. Condiţiile se scriu: $x^2 = x + 1 - \frac{1}{ax}$, $2x = 1 + \frac{1}{ax^2}$ sau $ax^3 - ax^2 - ax + 1 = 0$, $2ax^3 - ax^2 - 1 = 0$. Se observă că $a = 1$ este o soluţie şi rezultă $x = 1$. Prin verificări directe pe fiecare punct din grilă rezultă şi $a = -\frac{27}{5}$, $x = -\frac{1}{3}$. Altfel: $-2(ax^3 - ax^2 - ax + 1) + 2ax^3 - ax^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{x^2 + 2x}$, $x \neq 0$ şi înlocuim în $a(2x^3 - x^2) - 1 = 0$; rezultă $6x^2 - 4x - 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $a = -\frac{27}{5}$.

2.887B $f : (0,\infty)$, $f(x) = \ln(x + \frac{1}{x}) + \frac{x^2-1}{x^2+1}$ are un singur punct de inflexiune: $f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} + \frac{-x^4+4x^2+1}{(1+x^2)^2 x^2} = \frac{-x^6-9x^4+9x^2+1}{x^2(x^2+1)^3}$ ecuaţia $-x^6 - 9x^4 + 9x^2 + 1 = 0$ are numai o rădăcină reală pozitivă $(x^2 - 1)(x^4 + 10x^2 + 1) = 0$, $x^2 = 1$, $(x^2)_{1,2} = -5 \pm \sqrt{24}$, deci numai $x_1 = 1$ este reală şi pozitivă.

2.888B Fie M mulţimea perechilor $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pentru care dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică la graficul lui $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = a\sqrt{x^2 + bx}$. Se cere

$$S = \sum_{(a,b) \in M} (a + b);\ m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a|x|\sqrt{1 + \frac{b}{x}}}{x} = \begin{cases} a, & +\infty \\ -a, & -\infty \end{cases},$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} a(\sqrt{x^2 + bx} - x) = a \lim_{x \to \infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2 + bx} + x} = \frac{ab}{2},$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} a(\sqrt{x^2 + bx} + x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2 + bx} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{abx}{-x(\sqrt{1 + \frac{b}{x}} + 1)} =$$

$-\frac{ab}{2}$. Rezultă $a = 2$, $b = 3$ şi $a = -2$, $b = 3$ deci $\sum_{(a,b) \in M} (a + b) = 6$.

2.889B Fie şirul de funcţii $f_n : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{(x^{2n}+1)(\sqrt{x^2+x+1}-x)}{x^{2n}+x}$ şi $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Atunci f admite toate cele trei tipuri de asimptote. R. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}, & x \neq 0, |x| < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} - x, & |x| > 1 \end{cases}$ (deoarece $\lim_{n \to \infty} x^{2n} = \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$). Avem $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2}$, deci $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

$$m = \lim_{n \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{x} = \lim_{n \to -\infty} \frac{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)}{x} = -2;$$

$$n = \lim_{n \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{n \to -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = -\frac{1}{2}, \text{ deci}$$

$y = -2x - \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$; $x = 0$ este asimptotă verticală.

2.890B Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ are două puncte de extrem $x = \frac{1}{e}$ şi $x = -\frac{1}{e}$; pentru $x > 0$ $f(x) = x^x$, $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ deci $x = \frac{1}{e}$ este punct de extrem; dacă $x < 0$ notăm $x = -t$, $t > 0$, $g(t) = t^{-t}$, $g'(t) = t^{-t}(-1 - \ln t)$, deci $t = \frac{1}{e} = -x$ este punct de extrem.

2.891B Pentru funcţia $g(x) = |4x^3 - 3x + 1|$, punctele $x_1 = -1$ punct unghiular, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ sunt puncte de maxim respectiv minim: $f(x) = |(x + 1)(2x - 1)^2| = \begin{cases} (x + 1)(2x - 1)^2, & x \geq -1 \\ -(x + 1)(2x - 1)^2, & x < -1 \end{cases}$, $f'(x) = 3(4x^2 - 1)$, $x > -1$, $f'(x) = -3(4x^2 - 1)$, $x < -1$, nu există în $x = -1$.

Tabloul de valori:

	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
f'	$-$	$---$	$-9\|9$	$++$	0	$--$	$--$	$--$	0	$++$	
f	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$

Altfel, mai uşor, putem construi graficul funcţiei $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ şi luăm simetricul graficului faţă de Ox acolo unde $f(x) < 0$, deci $x < -1$.

2.892B Mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ este $[0, e^{\frac{1}{e}}]$: $\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$ ($0^\infty = 0$), $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ ($n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \to 1$), $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$; $x = e$ este punct de maxim cu $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, $y = 1$ asimptotă orizontală, deci imaginea funcţiei f este $[0, e^{\frac{1}{e}}]$.

2.893B Asimptotele oblice ale curbei $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \ln(1 + |x|)$: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{x} = 0$, deci avem o singură asimptotă şi la $+\infty$ şi la $-\infty$, $y = \frac{x}{2}$.

2.894B Să se arate că $f \geq g$ dacă $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

Dezvoltarea în serie a lui $\operatorname{ch}x$ este $\operatorname{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots$ deci evident $\operatorname{ch}x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$, $f \geq g$. Altfel, notăm $h(x) = f(x) - g(x)$, $h(0) = 0$, $h'(x) = \operatorname{sh}x - x = \varphi(x)$, $\varphi'(x) = \operatorname{ch}x - 1 \geq 0$, $\varphi(0) = 0$ deci φ este crescătoare, $\varphi(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $\varphi(x) > 0$ pentru $x > 0$ deci h descreşte pentru $x < 0$ şi creşte pentru $x > 0$, deci $h \geq 0$.

2.895B Determinaţi intervalul pe care $f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$, $x \neq 0$ este concavă; $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2}$, $f''(x) = 2 + \frac{16}{x^3} = 2 \cdot \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2}$ deci $f'' \leq 0$ pe $[-2, 0)$.

2.896B Să se determine mulţimea maximală la care restricţia funcţiei $f(x) = \sqrt{|x+2| - x}$ este inversabilă şi să se determine inversa ei. $y = f(x) = \sqrt{|x+2| - x} = \begin{cases} \sqrt{2}, & x + 2 \geq 0, x \geq -2 \\ \sqrt{-2x-2}, & x + 2 < 0, x < -2 \end{cases}$ deci f este injectivă pe $(-\infty, -2]$ unde este inversabilă şi $y = \sqrt{-2x-2} \Rightarrow x = -1 - \frac{y^2}{2}$, deci inversa lui f este $f^{-1}(x) = -1 - \frac{x^2}{2}$.

2.897B Intervalele de convexitate ale funcţiei $f : [0, 2\pi]$, $f(x) = x + \sin^2 \frac{x}{2}$: $f'(x) = 1 + \frac{\sin x}{2}$, $f''(x) = \frac{\cos x}{2}$, $\cos x > 0$ pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

2.898B Graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{\alpha x^3 + \beta x^2}$ admite asimptotă oblică $y = 2x - \frac{1}{6}$. Care sunt valorile lui α şi β? $2 = m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\alpha x^3 + \beta x^2}{x^3}} = \sqrt[3]{\alpha}$ deci $\alpha = 8$. $-\frac{1}{6} = n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + \beta x^2} - 2x) = 2 \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + \frac{\beta}{8} x^2} - x \right) = 2 \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{\beta}{8} x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + \frac{\beta}{8} x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + \frac{\beta}{8} x^2) x^3} + \sqrt[3]{(x^3)^2}} = \frac{2\beta}{24} = -\frac{1}{6}$ deci $\beta = -2$. Rezultă $\alpha = 8$ şi $\beta = -2$.

2.899B Să se afle valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care graficul lui $f(x) = \frac{e^x - (m+1)e^{-x}}{e^x - 1}$ intersectează axa Ox. Condiţia $me^x - (m+1)e^{-x} = 0$ înseamnă $e^{2x} = \frac{m+1}{m} > 0$, $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ sau altfel $n = \frac{1}{m} = e^{2x} - 1 > -1$, $-1 < n < 0$, $0 < n$, deci $-1 < \frac{1}{m} < 0$, $0 < \frac{1}{m} \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

2.900B Funcţia $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ are 2 asimptote: $x = 0$ asimptotă verticală, $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$ şi $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$, $m_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 1$, $n_1 = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Deoarece $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} > 0$ nu avem extreme deci $n = 2$, $m = 0$.

2.901B Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile şi $A = \{\alpha, \alpha \in D, f(\alpha) = g(\alpha)\}$, $B = \{\alpha, \alpha \in D, f'(\alpha) = g'(\alpha)\}$ şi $C = A \cap B$. Atunci A înseamnă că f coincide cu g în α, B înseamnă că în α tangentele la grafic sunt paralele, iar C înseamnă că f şi g au tangentă comună în α.

2.902B $f(x) = \frac{-x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ are numai asimptote oblice: f este pară, $\sqrt{x^2+1} \neq 0$,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ deci nu avem asimptote verticale şi nici orizontale, $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x^2})}{x|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \pm 1$, $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) \mp x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2 \mp x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}(x^2 \pm x\sqrt{x^2+1})} + \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} = 0$.

2.903B Asimptotele graficului funcţiei $f(x) = x - x^2 \ln \frac{1+x}{x}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(x - x^2 \ln \frac{1+x}{x} \right) = -1 - \ln(+0) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{t = \frac{1}{x} \to \pm 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală, iar $y = \frac{1}{2}$ orizontală.

2.904B Asimpotele funcţiei $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$ sunt $x = 1$ asimptotă verticală $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ asimptotă orizontală.

2.905B Funcţia $f : (-\infty, -3) \cup [0, \infty)$, $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ admite o asimptotă oblică, una verticală şi una orizontală: $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$ $(x < -3)$, deci $x = -3$ este asimptotă verticală; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + \lim\limits_{x \to \infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 1 \right) = 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x \left(\frac{x}{x+3} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1} = 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{-3x}{x+3}}{\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală; $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - x - x\sqrt{\frac{x}{x+3}}}{x} = -2$, $n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x \right) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x}{x+3}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}}}$ deci $y = -2x + \frac{5}{2}$ este asimptotă oblică .

2.906B Pe graficul funcţiei $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ să se determine un punct $A(a, b)$ în care tangenta să fie paralelă cu dreapta ce trece prin $M(1, 1)$ şi $N\left(2, \frac{1}{2}\right)$. R. Panta dreptei este $m = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 2} = -\frac{1}{2}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$ deci punctul A este $A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.907C Fie $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ ax - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$. Atunci f este injectivă $\Leftrightarrow a \geq 2$. f este injectivă dacă $a > 0$ şi $f(x) \geq 1$ pentru $x > 1$, $\lim\limits_{x \to 1} (ax - 1) = a - 1 \geq 1$ deci $a \geq 2$. Dacă $f([0, 2]) = [0, 2]$, este necesar ca

$a > 0$, $g(x) = ax - 1$ crescătoare $g(2) = 2a - 1 = 2$, $a = \frac{3}{2}$ şi condiţia $a \geq 2$ nu este verificată.

2.908C Să se calculeze $\mathrm{Im}f$ dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Se ştie că $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}x < \frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$; dar $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ deci $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ îşi ia toate valorile. Avem $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}$; $f'(x) = \frac{4}{1+x^2}$, dacă $|x| < 1$, $f'(x) = 0$ dacă $|x| > 1$ şi nu există în $x = \pm 1$. Deci f este constantă pentru $x \leq -1$ şi anume $f(x) = -\pi = f(-1)$ iar pentru $x \geq 1$ este tot constantă şi ia valoarea $\pi = f(1) \cdot f'(x) = \frac{4}{1+x^2} > 0$ pe $(-1, 1)$ deci este crescătoare şi ia valorile $(-\pi, \pi)$. Dar f este continuă deci $\mathrm{Im}f = [-\pi, \pi]$.

2.909C Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$. Pentru ce $\alpha \in \mathbf{R}$ avem $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$? În [14], pag. 207 se arată că pentru $\alpha \in (0, 1)$, $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $x > 0$ ($\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x$, $\varphi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi'(x) > 0$ pentru $x < 1$, $\varphi'(x) < 0$ pentru $x > 1$, deci $x = 1$ este punct de maxim pentru $\varphi(x)$ şi $\varphi(1) = 1 - \alpha \geq x^\alpha - \alpha x$). Din aceasta rezultă că $f(x) \geq 0$ pentru $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

2.910C Să se determine $A = \{m \in \mathbf{R}, f$ are cel puţin un punct de inflexiune$\}$ dacă $f(x) = e^x + mx^3$, $x \in \mathbf{R}$. R. $g(x) = f''(x) = e^x + 6mx$, $g(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină şi îşi schimbă şi semnul dacă $m \in (-\infty, -\frac{e}{6}) \cup (0, \infty)$. Se observă grafic că dreapta $y = ex$ şi $y = e^x$ sunt tangente în $x = e$, deci $y = ax$ se intersectează cu $y = e^x$ în două puncte dacă $e < a < \infty \Rightarrow e < -6m < \infty$ sau $m < -\frac{e}{6}$. Evident că $y = ax$ intersectează pe $y = e^x$ dacă $a < 0$, deci $-6m < 0$, $m > 0$.

2.911C Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ considerăm funcţia $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^n x$. Există un punct $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât f este convexă pe $(0, x_n)$ şi concavă pe $(x_n, \frac{\pi}{2})$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. R. $f''(x) = n\sin^{n-2}x[(n-1) - n\sin^2 x] = 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$; $x_n = \arcsin\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin\sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \arcsin\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ $= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2.912C Punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x) = (1 + x)e^{-|1-x|}$.

R. $f(x) = \begin{cases} (1+x)e^{x-1}, & x \leq 1 \\ (1+x)e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}(x+2)e^x, & x < 1 \\ -exe^{-x}, & x > 1 \end{cases}$; $f''(x) =$

$\begin{cases} \frac{1}{e}(x+3)e^x, & x < 1 \\ e(x-1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$ deci punctul de inflexiune este $x = -3$.

2.913C Fie $f(x) = \min(\ln|x|, x + 1)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se afle intervalele

maximale pe care funcţia este convexă.

$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ \ln|x|, & -1 < x, x \neq 0 \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -\frac{1}{x^2}, & -1 < x, x \neq 0 \end{cases}$ $f''(x)$ nu există în, $x = -1$ şi $x = 0$, deci este convexă pentru $x \leq -1$.

2.914C Aflaţi cea mai mică constantă λ astfel încât $\ln(1 + e^t) < \lambda + t$, $\forall t \in (0, \infty)$. R. Făcând graficele funcţiilor $f(x) = \ln(1+e^x)$, $g(x) = x + \ln 2$, $x > 0$, observăm că $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru f, deci paralelă cu graficul lui g (dreapta $y = x + \ln 2$) $f(x)$ este convexă ($f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$) $f(0) = \ln 2 = g(0)$, $g(x) \leq f(x)$ de unde rezultă $\lambda = \sqrt{2}$. Altfel: determinăm extremele funcţiei $f(t) = \ln(1 + e^t) - t$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \ln 2$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, $f'(t) = -\frac{1}{1+e^t} < 0$, f descreşte, $\sup\limits_t f(t) = \ln 2$, $\lambda = \ln 2$.

2.915C Fie $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şi fie $x_k \in \mathbf{R}$ valoarea lui x din intervalul $\left[\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{-1}, \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ pentru care are loc formula lui Lagrange. Fie $l = \lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k)$. Se cere l. Lagrange se scrie $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-2} + \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{-2} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} - \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{-1}\left[2x_k \sin\frac{1}{x_k} - \cos\frac{1}{x_k}\right]$ sau $\pi f'(x_k) = \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \pi \cdot f'(x_k) = 2$, $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = \frac{2}{\pi}$.

2.916C Fie $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Se cere domeniul pe care f este convexă. R. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 2\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right)$, $f'' = 3 \cdot 2\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right) = 6\frac{4x^3+6x^2+4x+1}{x^4(x+1)^4} = 6 \cdot \frac{(4x^3+2x^2)+(4x^2+2x)+(2x+1)}{x^4(x+1)^4} =$ $6 \cdot \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)}{x^4(x+1)^4} > 0$ pentru $x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$, deci $x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{0\}$.

2.917C Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei $f(x) = \int_1^x (3\ln t + t^2 - 5t - 3 - e^2 + 5e)dt$. R. Se ştie că $f(x) = \int_a^x g(t)dt$, g continuă $\Rightarrow f'(x) = g(x)$, deci $f'(x) = 3\ln x + x^2 - 5x - 3 - e^2 + 5e$, $x > 0$, $f''(x) = \frac{3}{x} + 2x - 5 = \frac{2x^2-5x+3}{x}$, punctele de inflexiune sunt $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

2.918C Să se determine numărul n, al asimptotelor la graficul lui f şi m numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$, dacă $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$. Rădăcinile ecuaţiei $\ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = 0$: $e^{2x} - 4e^x + 3 = 1$, $t^2 - 4t + 2 = 0$ ($t = e^x$), $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x_1 = \ln(2 + \sqrt{2})$, $x_2 = \ln(2 - \sqrt{2})$, deci $m = 2$. Asimptota orizontală la $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln 3$, deci $y = \ln 3$. Din ecuaţia $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ $(e^x)_{1,2} = 1; 3$ rezultă asimptotele verticale

$x = 0$ şi $x = \ln 3$.

$$m^* = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x})}{x} = 2,$$

$$n^* = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}) = 0,$$

$y = 2x$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Prin urmare $n = 4$ şi $m = 2$.

2.919C Asimptotele funcţiei $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$; asimptota verticală $x - \sqrt{x^2+2x+4} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2+2x+4}$, $x = -2$ nu verifică, nu avem asimptotă verticală. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-x=t\to\infty} \frac{-1}{t+\sqrt{t^2-2t+4}} = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}}{-2x-4} = \frac{2}{-2} = -1$, deci $y = 0$ şi $y = -1$ sunt asimptote orizontale.

2.920C $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-a}$ are două extreme locale dacă şi numai dacă $a > 1$: $f'(x) = \frac{e^x(x+1)(e^x-a)-xe^{2x}}{(e^x-a)^2} = \frac{e^x(e^x-ax-a)}{(e^x-a)^2}$; utilizăm metoda grafică separând pe a, $a = \frac{e^x}{x+1}$, intersectăm $y = a$ cu $y = \frac{e^x}{x+1}$ şi rezultă pe grafic că ecuaţia $e^x - ax - a = 0$ are două rădăcini dacă şi numai dacă $a > 1$.

2.7. Primitive

2.921A $F(x) = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg}x) = \operatorname{tg}x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$

2.922A $F(x) = \int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C.$

2.923A $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C.$

2.924A $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+(e^x)^2}} = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) + C.$

2.925A $\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int [(x^2+1)-1]\sqrt{x^2+1}d(x^2+1) =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + C = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2+1)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$

2.926A Deoarece $(\ln(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx =$

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\ln(x+\sqrt{1+x^2})) = \frac{1}{2}(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))^2 + C.$

2.927A $x > 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} =$

$= 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C.$

2.928A $\int \frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{1+x^2}dx = \int (\operatorname{arctg}x)^2 d(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg}x)^3 + C.$

2.929A $F(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2^2}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= \int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{2^2 + (\operatorname{tg}x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2} + C.$

2.930A $F(x) = \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

2.931A Deoarece $x > 0$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} =$

$= -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C.$

2.932A $x > 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})^3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\frac{1}{x^2}+1)}{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})^3}} =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

2.933A $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

2.934A $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C.$

2.935A $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1} = \int \frac{xdx}{(x^2-1)^2-(\sqrt{2})^2} = \int \frac{xdx}{[x^2-(1+\sqrt{2})][x^2+(\sqrt{2}-1)]} =$

$= \int \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2-(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right)d(x^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right| + C.$

2.936A $\int \sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}dx = \int \frac{e^x+1}{\sqrt{(e^x)^2-1}}dx = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}} - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$

$= \ln|e^x + \sqrt{e^{2x}-1}| - \arcsin e^{-x} + C \ (x > 0).$

2.937A $F(x) = \ln\sqrt{4+x^2}$ este o primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{x+a}{4+x^2}$ dacă $a = 0$ deoarece $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{4+x^2}$.

2.938A O primitivă a funcţiei $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$ este $F(x) =$

$\begin{cases} e^x(x-1)+1 \\ x^3 \end{cases}$: $F(x) = \begin{cases} e^x(x-1)+C \\ x^3 + C_1 \end{cases}$ unde $C_1 = C - 1$ şi luăm $C_1 = 0$.

2.939A $I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx\ \left(x\in(\frac{\pi}{2},0)\right)=\int\frac{(1-\sin^2 x)(\sin x)'}{\sin x}dx=$
$=\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+k=\ln\sin(-x)+\frac{\cos^2 x}{2}+C\ (C=k-\frac{1}{2}))$

2.940A $\int\sin x\sin 2xdx=2\int\sin^2 x(\sin x)'dx=\frac{2}{3}\sin^3 x+C.$

2.941A $\int\frac{\ln xdx}{x(1-\ln^2 x)}=\int\frac{\ln xd(\ln x)}{1-\ln^2 x}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-\ln^2 x)}{1-\ln^2 x}=-\frac{1}{2}\ln(1-\ln^2 x)+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\ln^2 x}+C\ (x\in(e^{-1},e)\Rightarrow -1<\ln x<1).$

2.942A $x\in(-1,0)$, $\int\frac{x^2-3}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\frac{x^3}{x^2-1}+C.$

2.943A $F(x)=\int\frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}=\operatorname{arctg}\sin x+C,\ F(1)-F(-1)=2\operatorname{arctg}(\sin 1).$

2.944A $\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int x(e^x)'dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$

2.945A $I(x)=\int x\sin xdx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos+\sin x+C,\ J(x)=\int x\cos xdx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x+\cos x+C_1;\ I(0)=0=C,\ J(0)=1=1+C_1,\ I^2(x)+J^2(x)=x^2+1.$

2.946A $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C.$

2.947A $f(x)=|x-1|$ este continuă şi admite o infinitate de primitive pe R.

2.948A $\int\cos^2 x\sin xdx=-\int\cos^2 x(\cos x)'dx=-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$

2.949A $F(x)=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C=F(x);\ F(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}\Rightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{2};\ F(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$

2.950A Pentru $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+1, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$, $F(x)=\int f(x)dx=$
$\begin{cases}x^3+x^2+x+C\\ e^x+C_1\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x, & x\le 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$.
$F(0)=C=1+C_1.$

2.951A $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ are primitiva $F(x)=\begin{cases}x^2-x+C, & x\le 1\\ x^3+C_1, & x>1\end{cases}$
de unde $F(1)=C=\frac{1}{3}+C_1$. Condiţia $F(4)=-8=\frac{4^2}{3}+C-\frac{1}{3}$.

2.952A Deoarece $\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$ rezultă $F(x)=\int xe^x\sin xdx=\int x[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)]'dx=\frac{1}{2}xe^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x(\sin x-\cos x)dx=\frac{1}{2}xe^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x\cos x+C.$

2.953A $F(x)=\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int(x^3)'\ln xdx=\frac{1}{3}(x^3\ln x-\int x^3\frac{1}{x}dx)=\frac{1}{3}(x^3\ln x-\frac{x^3}{3})+C.$

2.954A $I=\int\operatorname{arctg}xdx=\int(x)'\operatorname{arctg}xdx=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

2.955A $\int_1^t(x-1)e^{-x}dx=-(x-1)e^{-x}|_1^t+\int_1^t e^{-x}dx=-te^{-t}+e^{-1}\to\frac{1}{e}.$

2.956A $F(x)=\int x\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}\int(x^2)'\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}[x^2\ln(x+1)-\int\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx]=\frac{1}{2}[x^2\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}+x-ln(x+1)]+C=(x^2-1)\ln\sqrt{x+1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C.$

2.957A $F(x)=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{1+(e^{-x})^2}=-\operatorname{arctg}e^{-x}+C$ sau $F(x)=\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\operatorname{arctg}e^x+C_1.$

2.958A $F(x)=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)-1}{\sqrt{1+x^3}}d(x^3+1)=\frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]=\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C;\ F(0)=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+C=0,\ C=\frac{4}{9},\ a=F(2)=\frac{40}{9}.$

2.959A $\int\frac{dx}{e^x+1}=-\int\frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+C=F(x)\to-\infty.$

2.960A $f(x)=\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ x^2, & 1<x\end{cases}$ nu este continuă deci nu este derivabilă, admite primitive, $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+C, & x<0\\ \frac{x^2}{2}+C_1, & 0\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+C_2, & 1<x\end{cases}$, $F(0)=C=C_1$, $F(1)=\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{3}+C_2$ deci d) şi f) sunt false. Rămâne e), f nu este monotonă.

2.961B Funcţia $f(x)=\begin{cases}x^2+m, & x<0\\ x+2m^2, & x\ge 0\end{cases}$ este continuă dacă $m=2m^2$,

deci $m = 0$ sau $m = \frac{1}{2}$ şi atunci admite primitive.

2.962B Primitiva $F(x)$ a lui $f(x) = xe^{-x}$ care verifică condiţia $F(-1) = 0$ este $F(x) = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$, $F(-1) = 0 = C$ deci $F(x) = -e^{-x}(x+1)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.

2.963B $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. $F(0) = 0 = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + C$; $F(1) = \frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

2.964B Făcând derivatele funcţiilor din enunţ se observă că primitiva funcţiei $f(x) = \frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}}$ este $F(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n) + \frac{1}{3n}\operatorname{arctg}(x^{3n}) + C$. Poate fi calculată şi direct observând că:

$$\frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}} = \frac{(x^{5n-1}+x^{n-1})(1+x^{2n})}{(1+x^{2n})(1+x^{6n})} = \frac{x^{5n-1}+x^{7n-1}+x^{n-1}+x^{3n-1}}{(1+x^{2n})(1+x^{6n})}$$

$$\frac{x^{n-1}(x^{6n}+1)+x^{3n-1}(x^{2n}+1)}{(x^{2n}+1)(x^{6n}+1)} = \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1} + \frac{x^{3n-1}}{x^{6n}+1} \quad \text{deci}$$

$$\int \frac{x^{5n-1}+x^{n-1}}{1+x^{6n}}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}dx + \int \frac{x^{3n-1}}{x^{6n}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{d(x^n)}{(x^n)^2+1} + \frac{1}{3n}\int \frac{d(x^{3n})}{(x^{3n})^2+1} = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n + \frac{1}{3n}\operatorname{arctg}x^{3n} + C.$$

2.965B $F(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{d\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-(\sqrt{x^3})^2}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3} + C.$

2.966B Funcţia 1° $x \to \max\{1, x^2\}$ are proprietatea lui Darboux şi are primitivă, celelalte funcţii 2° $x \to [x]-x$; 3° $x \to \operatorname{sgn}x$, 4° $x \to (1+x^2)\operatorname{sgn}x$; 5° $x \to [\cos x]$, 6° $x \to \{\sin x\}$ nu au proprietatea lui Darboux şi nu au primitivă .

2.967B $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \operatorname{arctg}x - \int x\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)'dx = \operatorname{arctg}x + \left[\frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right] = \frac{\operatorname{arctg}x}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$

2.968B $\int \frac{(2x-3)dx}{(x-1)^2(x-2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + C = \frac{1}{-x^2+3x-2} + C.$

2.969B $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + C.$

2.970C Funcţia $f : [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2x-2, & x \in (1,2] \end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux şi nu admite primitive ($\left(\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]\right) = f\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left(1, \frac{5}{4}\right]\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$), nu este injectivă, este integrabilă, f este surjectivă.

2.971C Funcţia $f(x) = [x] - x = -\{x\}$ nu are proprietatea lui Darboux dar $f(\mathbf{R})$ este un interval (rezultă din reprezentarea grafică a "părţii zecimale" $\{x\}$.

2.972C Funcţia $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pentru $a = 0$: fie $g(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ continuă şi $G(x)$ o primitivă a lui $g(x)$; evident o primitivă a lui $f(x)$ este de forma $F(x) = x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x) + C$. $(F'(x)) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right) - 2G'(x) = \sin\frac{1}{x}$, deoarece $G'(x) = x\cos\frac{1}{x}$, $F(x)$ este derivabilă în origine şi $F'(0) = f(0)$ numai pentru $a = 0$.

2.973C Fie $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$. f este continuă, are primitive, g nu are proprietatea lui Darboux, deci nu are primitive.

2.974C $a_n = \int_0^n e^{-\sqrt{x}}dx = 2\int_0^n \sqrt{x}(-e^{-\sqrt{x}})'dx = 2[-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}|_0^n + \int_0^n e^{-\sqrt{x}}d(\sqrt{x})] = -2\sqrt{n}e^{\sqrt{n}} - 2e^{-\sqrt{x}}|_0^n = -2[e^{-\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1) - 1]$; $\lim a_n = 2$.

2.975C Dacă F este o primitivă a lui f şi $F(x)f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(0) = 1$ atunci $F(x)F'(x) = x$, $\int F(x)F'(x)dx = \frac{F^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$, $F^2(0) = 1 = C$, $F^2(x) = x^2+1$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2.976C $F(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+1)}\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{1}{2}[\ln x - 2\ln(x+1) + \ln(x+2)] + C = \ln\sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}} + C$ $(x \in (0,\infty))$.

2.977C $I_n(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+x^5)^n} = \int_0^t \frac{1}{(1+x^5)^n}\cdot(x)'dx = \frac{x}{(1+x^5)^n}\Big|_0^t +$

$+5n\int_0^t \frac{(x^5+1)-1}{(1+x^5)^{n+1}}dx = \frac{t}{(1+t^5)^n} + 5nI_n(t) - 5nI_{n+1}(t) \Rightarrow I_{n+1}(t) = \frac{5n-1}{5n}I_n(t) + \frac{1}{5n}\cdot\frac{t}{(1+x^5)^n}$.

2.978C $F(x) = \int (x)'\text{arctg}\sqrt{x}\cdot dx = x\text{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{(\sqrt{x})^2+1-1}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x}) = x\text{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{arctg}\sqrt{x} + C$.

2.979C O primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{1}{5-4\cos x}$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ o determinăm astfel: punem $\text{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi deoarece în $x = \pi$, $\text{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită, $F(x) = \int \frac{dx}{5-4\cos x} = 2\int \frac{dt}{1+9t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{d(3t)}{1+(3t)^2} = \begin{cases} \frac{2}{3}\text{arctg}\left(3\text{tg}\frac{x}{2}\right), & x\in[0,\pi) \\ k, & x=\pi \\ \frac{2}{3}\text{arctg}\left(3\text{tg}\frac{x}{2}\right)+C, & x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} F(x) = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} F(x) = \frac{2}{3}\text{arctg}(-\infty) + C = -\frac{\pi}{3} + C = \frac{\pi}{3} = k$ deci o primitivă este

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\text{arctg}\left(3\text{tg}\frac{x}{2}\right), & x\in[0,\pi) \\ \frac{\pi}{3}, & x=\pi \\ \frac{2}{3}\text{arctg}\left(3\text{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{3}, & (\pi,2\pi] \end{cases}$$

2.6 Integrale definite

2.980A $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_1^3 \frac{2d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\text{arctg}\sqrt{x}\big|_1^3 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2.981A $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ctg}^2x + \text{ctg}^4x + \text{ctg}^6x + \text{ctg}^8x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ctg}^2x + \text{ctg}^6x)(1+\text{ctg}^2x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ctg}^2x + \text{ctg}^6x)d(\text{ctg}x) = -\left(\frac{\text{ctg}^3x}{3} + \frac{\text{ctg}^7x}{7}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{21}$

2.982A Funcţia $f(x) = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{3+\cos 4x}{4}$ are perioada $\frac{\pi}{2}$ ($\cos\alpha x$ are perioada $\frac{2\pi}{\alpha}$) şi proprietatea $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ deci $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4x + \cos^4x} = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 4x} = 32\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3+\cos 4x}$; cu schimbările succesive $4x = t$ şi $\text{tg}\frac{t}{2} = u$ obţinem $I = 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{3+\cos t} = 16\int_0^{\infty} \frac{du}{4+2u^2} = 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty} = 2\sqrt{2}\pi$. (Altfel

cu $\text{tg}2x = t$: $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\frac{\sin^2 2x}{2}} = 8\int_0^{\infty} \frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 8\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+t^2}$).

2.983A Aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f(x) = |x|$ şi $g(x) = 1$, $x\in[-1,1]$ este $2\int_0^1 (1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$.

2.984A $\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = (e^x - e^{-x})\big|_0^1 dx = e + \frac{1}{e} - 2$.

2.985A Divizând segmentul $[0,1]$ în n părţi cu punctele de diviziuni $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$, pentru funcţia $f(x) = \sqrt{1+x}$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2.986A $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^6+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2}dx = \frac{1}{3}\text{arctg}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\text{arctg}1 = \frac{\pi}{12}$.

2.987A $\int_0^1 x^2\sqrt{1+3x^3}dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (1+3x^3)^{\frac{1}{2}}(1+3x^3)'dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+3x^3)^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{27}(\sqrt{4^3}-1) = \frac{14}{27}$.

2.988A $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\arcsin x + \sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

2.989A $I = \int_{-1}^1 x^3\sqrt{1+x^4}dx = 0$, $f(x) = x^3\sqrt{1+x^4}$ este impară.

2.990A Analog cu 2.985A, $I = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

2.991A $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ctg}^3x + \text{ctg}^5x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ctg}^3x(1+\text{ctg}^2x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ctg}^3x\cdot d(\text{ctg}x) = -\frac{\text{ctg}^4x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(\text{ctg}^4\frac{\pi}{2} - \text{ctg}^4\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

2.992A $I = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n}2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^xdx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

2.993A $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.994A $I=\int_0^{\pi}\frac{xdx}{(x^2+\pi^2)^3}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x^2+\pi^2)^{-3}(x^2+\pi^2)'dx=\left.\frac{(x^2+\pi^2)^{-3+1}}{-3+1}\right|_0^{\pi}$
$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi^4}-\frac{1}{\pi^4}\right)=\frac{3}{8\pi^4}$.

2.995A $I=\int_0^1 e^x\sin xdx=e^x\sin x|_0^1-\int_0^1 e^x\cos xdx=e^x(\sin x-\cos x)|_0^1-$
$\int_0^1 e^x\sin xdx\Rightarrow I=\frac{1}{2}[1+e\sin 1-e\cos 1]$.

2.996A $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int_1^1\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+2^2}=\left.\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2}\right|_{-1}^1=$
$-\frac{1}{2}\text{arctg}(-1)=\frac{\pi}{8}$

2.997A $I=\int_{-1}^2\frac{|x|-1}{x+3}dx=-\int_{-1}^0\frac{(x+1)dx}{x+3}+\int_0^2\frac{(x-1)dx}{x+3}=-\int_{-1}^0\left(1-\frac{2}{x+3}\right)dx+$
$\int_0^2\left(1-\frac{4}{x+3}\right)dx=-x|_{-1}^0+2\ln(x+3)|_{-1}^0+[x-4\ln(x+3)]|_0^2=1-2\ln 2+$
$6\ln 3-4\ln 5$.

2.998A Dacă $f(x)=\frac{F'(x)}{F^2(x)}$ atunci $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{dF(x)}{F^2(x)}=\left.-\frac{1}{F(x)}\right|_a^b=$
$-\frac{1}{F(b)}+\frac{1}{F(a)}$.

2.999A Dacă $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ atunci $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\left.\frac{\sin 2x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\left.\frac{\sin 2x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ deci
$A=B$. (Altfel: $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$, $A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$).

2.1000A $S=\int_1^4\frac{xdx}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}=\left.\frac{1}{2}\ln(x^2+9)\right|_1^4=\ln\sqrt{\frac{13}{9}}$.

2.1001A $\int_{-2}^3|2-2x|dx=2\left[\int_{-2}^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx\right]=$

$=2\left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3\right]=13$.

2.1002A Dacă $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x-1)dx=0$ atunci $(-a\cos x+b\sin x-x)|_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=0$ deci $a+b=\frac{\pi}{2}$.

2.1003A Dacă $\int_{-1}^2\left(\frac{x^2-4x+3}{x-3}-ax\right)dx=0$, deci

$\int_{-1}^2\left[\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)}-ax\right]dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}(1-a)x\right)\right|_{-1}^2=-\frac{3}{2}(a+1)=0,\quad a=-1$

2.1004A Să se calculeze derivata lui $F(x)=\int_0^{\text{arctg}x}\frac{1}{1+\text{tg}^2t}dt$. Notăm $G(t)$ o primitivă a lui $\frac{1}{1+\text{tg}^2t}$; atunci $F(x)=G(\text{arctg}x)-G(0)$ iar $F'(x)=G'(\text{arctg}x)\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\text{tg}(\text{arctg}x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

2.1005A $I=\int_{-2}^2|x-1|dx=\int_{-2}^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=\left.\left(\frac{x-x^2}{2}\right)\right|_2^1+$
$\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_1^2=5$.

2.1006A $I=\int_5^6\frac{x+1}{x^2-16}=\frac{5}{8}\int_5^6\frac{dx}{x-4}+\frac{3}{8}\int_5^6\frac{dx}{x+4}=$
$=\left.\left[\frac{5}{8}\ln(x-4)+\frac{3}{8}\ln(x+4)\right]\right|_5^6=\frac{3}{8}\ln 10+\frac{5}{8}\ln 2-\frac{3}{8}\ln 9$.

2.1007A Pe intervalul $I=[a,b]\subset[0,2\pi]$, $\lim_{n\to\infty}\int_a^b\cos nxdx=$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nb-\sin na}{n}=0$.

2.1008A $S=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^2}{3}\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=\frac{2}{9}\cdot 3^3=6$.

2.1009A $I=\int_0^1\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x+1-2x}{x^2+x+1}dx=$
$=\int_0^1\left[1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right]dx=$
$=\left.\left(x-\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)\right|_0^1=1+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$.

2.1010A $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\text{tg}tdt=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\left(\int_0^x\text{tg}tdt\right)'=\text{tg}x\right)$.

2.1011A $\int_0^1 e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}dx=\int_0^1(xe^{f(x)})'dx=\left.xe^{f(x)}\right|_0^1=e^{f(1)}$.

2.1012A $\int_0^{\pi}\cos^3 xdx=\int_0^{\pi}(1-\sin^2 x)(\sin x)'dx=\left.\left(\sin x-\frac{\sin^2 x}{3}\right)\right|_0^{\pi}=0$;

se aplică teorema Lagrange primitivei $F(x)$ a lui $f(x)$: $F(\pi) - F(0) = (\pi - 0)F'(\xi) = \pi f(\xi) = \pi \cos^3 \xi = 0$, deci $\xi = \frac{\pi}{2}$.

2.1013A Pentru $I = [a, b] \subset [0, 2\pi]$, $\int_I \sin nx dx = \frac{1}{n}(\cos na - \cos nb) \to 0$.

2.1014A Pentru funcţia $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \frac{x^2}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$ valoarea integralei

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{23}{18}.$$

2.1015A $I = \int_{-2}^{2} 2^{[x]}dx$ ([x] - partea întreagă a lui x) se poate scrie

$$I = \int_{-2}^{-1} 2^{-2}dx + \int_{-1}^{0} 2^{-1}dx + \int_0^1 2^0 dx + \int_1^2 2dx = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{15}{4}.$$

2.1016A $I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \sin(\ln x) \cdot (\ln x)'dx = -\cos(\ln x)|_1^e = -\cos 1 + 1$.

2.1017A $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{k}{n} + 1\right) = \int_0^1 \ln(x+1)dx =$

$= x\ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln 2 - [x - \ln(x+1)]|_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

2.1018A $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^5 x + \mathrm{tg}^7 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^5 x)(\mathrm{tg}x)'dx =$

$= \left(\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

2.1019B $I = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$

$(2\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}))\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \ln 2$ deci $I \in \left[\frac{7}{6}, \frac{5}{4}\right]$.

2.1020B $a_n = \int_0^{\ln n} \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})} = \int_0^{\ln n} \frac{e^{-3x}dx}{e^{-2x}+1} = -\int_0^{\ln n} \frac{[(e^{-2x}+1)-1]de^{-x}}{e^{-2x}+1} =$

$(-e^{-x} + \mathrm{arctg}e^{-x})|_0^{\ln n} = -e^{-\ln n} + \mathrm{arctg}e^{-\ln n} + 1 - \mathrm{arctg}1 = -\frac{1}{n} + \mathrm{arctg}\frac{1}{n} + 1 - \frac{\pi}{4}$; $\lim a_n = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2.1021B $S = \int_0^1 (x+1)e^{1-x}dx + \int_1^2 (x+1)e^{x-1}dx = e\int_0^1 (x+1)(-e^{-x})'dx +$

$\frac{1}{e}\int_1^2 (x+1)(e^x)'dx = -e[(x+2)e^{-x}|_0^1 + \frac{1}{e}xe^x\Big|_1^2 = -e(1+2)e^{-1} + 2e + \frac{1}{e}(2e^2 - e) = 4(e-1)$.

2.1022B $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2xdx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}dx =$

$\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx = 1 - 2(x - \sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 3 - \pi$.

2.1023B $I = \int_0^{\pi} \sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$, $J = \int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{3+4x^2}} =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(3+4x^2)'dx}{2\sqrt{3+4x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3+4x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ deci $I + J = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

2.1024B $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 =$

$\ln 2$, $B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2.1025B $I = \int_0^{\pi} |\cos^3 x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-\sin^2 x)d(\sin x) =$

$\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

2.1026B $I = \int_1^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^A (\ln x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx =$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{1+x^2}\Big|_1^A - \int_1^A \frac{dx}{x(1+x^2)}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{d(1+\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x^2}}\right] =$

$-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\Big|_1^A\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln A}{1+A^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) - \ln 4\right]$;

$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{4}\ln 2$.

2.1027B $b = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = a$

2.1028B Notăm $y = f(x)$ deci $x = g(y)$, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$: $I = \int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(y)dy = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx + \int_\alpha^\beta g(y)dy =$

$bf(b) - af(a) - \int_\alpha^\beta g(y)dy + \int_\alpha^\beta g(y)dy = b\beta - a\alpha$.

2.1029B $I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1} = \int_1^3 \frac{dx}{1+a-x} = -\ln(1+a-x)|_1^3 =$

$-\ln(a-2) + \ln a = \ln\frac{a}{a-2}$ dacă $a > 3$. Rezultă $\lim_{a\to 3} I(a) = \ln 3$.

2.1030B Notăm cu $G(t)$ o primitivă a lui $f(t)$, $G'(t) = f(t)$ şi fie $F(x) =$

$\int_c^{b(x)} f(t)dt = G(b(x)) - G(c)$: $F'(x) = G'(b(x)) \cdot b'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x)$.

2.1031B $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)'dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2.1032B $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tx}$ nu are sens pentru $t = -\frac{1}{x}$, $0 \le t \le 1$, $0 \le t = -\frac{1}{x} \le 1$, deci domeniul de definiţie a lui F este $(-1, \infty)$.

2.1033B Abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f(x) = x^2e^x$ ($f'(x) = e^x(x^2+2x)$) sunt $x = 0$, $x = -2$ deci $S = \int_{-2}^0 x^2e^x dx = x^2e^x|_{-2}^0 - 2\int_{-2}^0 xe^x = -4e^{-2} - 2[xe^x - e^x]|_{-2}^0 = 2 - 10e^{-2}$.

2.1034B $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} \Rightarrow I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}dx =$
$= \ln(\sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ deci $I = J = \frac{\pi}{4}$.

2.1035B Dacă $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x, & x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ atunci aria cuprinsă între graficele lui $f_{n+1}(x)$ şi $f_n(x)$ care evident se intersectează în $x = 0$ şi $x = 1$ este $S = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ln x dx$ ($(x-1)\ln x > 0$, $\forall x \in (0,1)$) deci $S =$

$$\left[\left(\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\ln x - \left(\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$$

deoarece $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

2.1036B $\int_e^a \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_e^a \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}dx = -\frac{1}{\ln x}\Big|_e^a = 1 - \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e^2$.

2.1037B $S = \int_2^5 \frac{|x^2-4x+3|}{x}dx = -\int_2^3 \left(x - 4 + \frac{3}{x}\right)dx + \int_3^5 \left(x - 4 + \frac{3}{x}\right)dx =$
$-\left[\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln x\right]_3^5 = -2\left[\frac{9}{2} - 12 + 3\ln x\right] + [2 - 8 + 3\ln 2] + \left(\frac{25}{2} - 20 + 3\ln 5\right) = \frac{3}{2} + 3\ln\frac{10}{9}$.

2.1038B $I = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{dx}{x(\ln x)\ln\ln x} = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)\ln\ln x} = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} =$
$\ln\ln\ln x|_{e^e}^{e^{e^e}} = \ln\ln\ln e^{e^{e^e}} - \ln\ln\ln e^{e^e} = \ln\ln e^{e^e} - \ln\ln e^e = \ln e^e - \ln e = \ln e - \ln 1 = 1$.

2.1039B $\int_0^2 \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 +$

$+ \ 2\text{arctg}x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2\left(\text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

2.1040B Aria mărginită de curba $y = \frac{\sin 3x}{\sin^2 x} = f(x)$, axa Ox şi dreptele $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$: notăm $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$, $F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + 4\cos x$: deoarece $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx +$
$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = 2\left(F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}$.

2.1041C Vezi 2.1039: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 xdx +$
$+ \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ 2\text{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$.

2.1042C Deoarece $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[0,1]$ este mărginită pe [0,1] deci există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M$ pe [0,1]. $\left|\int_0^1 f(x)\cdot x^n dx\right| \le M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{M}{n+1} \to 0$.

2.1043C $a = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{x(1+\ln x)} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$; $b = \int_e^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int_e^{e^2}\frac{d(\ln x+1)}{1+\ln x} = \ln(1+\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln(1+2) - \ln(1+1) = \ln\frac{3}{2}$.

2.1044C $F(x) = \int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$, $(x \ne 0)$; $F(-x) = \int_{-x}^{-2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$ şi punem $t = -u$, $u = -t$, $dt = -du \Rightarrow F(-x) = -\int_x^{2x}\frac{u^2}{u^2+\sin^2 u}du = -F(x)$, F impară.

2.1045C $l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\sin\pi\frac{k}{n} = \int_0^1 \sin\pi x dx = -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$.

2.1046C $S = \int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\ln x|_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2$.

2.1047C $\min_{a,b\in\mathbf{R}}\int_{-1}^1 (x^2 - a - bx)^2 dx = \min_{a,b\in\mathbf{R}}\int_{-1}^1 \left(x^4 + a^2 + b^2x^2 - 2ax^2 - 2bx^3 + 2abx\right)dx = \min_{a,b\in\mathbf{R}}\left[\frac{x^5}{5} + a^2x + b^2\frac{x^3}{3} - 2a\frac{x^3}{3} - 2b\frac{x^4}{4} + abx^2\right]\Big|_{-1}^1 =$

$= \min_{a,b\in\mathbf{R}} \left[2\left(a^2 - 2\frac{a}{3}\right) + \frac{2b^2}{3} + \frac{2}{5}\right]$. $\min_{a,b\in\mathbf{R}} \left[2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2b^2}{3} + \frac{8}{45}\right] = \frac{8}{45}$ (luăm $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$).

2.1048C Dacă $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$, f continuă atunci $g'(x) = f(x+1) - f(x)$; notăm $F(t)$ o primitivă a lui f, $F'(t) = f(t)$ deci $g(x) = F(x+1) - F(x)$, $g'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x)$.

2.1049C Dacă f are derivată continuă pe $[a,b]$ deci $f'(x)$ este mărginită pe $[a,b]$ atunci $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos txdx$ se obține astfel: $\int_a^b f(x)\left(\frac{\sin tx}{t}\right)' dx = \frac{1}{t}f(x)\sin tx\Big|_a^b - \frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\sin txdx$ şi deoarece $|f(x)\sin tx|_a^b| \le |f(b) - f(a)|$ iar $\left|\int_a^b f'(t)\sin txdx\right| < M$ rezultă că limita este 0.

2.1050C Deoarece $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$ (notăm $-x = t$, $dx = -dt$ $\int_{-a}^{a} f(-x)dx = -\int_{a}^{-a} f(t)dt$) rezultă $I\alpha = \int_{-a}^{a} \alpha f(x)dx$, $I\beta = \int_{-a}^{a} \beta f(-x)dx$, $I(\alpha+\beta) = \int_{-a}^{a} [\alpha f(x) + \beta f(-x)]dx = \int_{-a}^{a} \gamma dx = \gamma\cdot 2a$, $I = \frac{2a\gamma}{\alpha+\beta}$ (sau se integrează pe $[a,b]$ egalitatea dată).

2.1051C $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\mathrm{tg}\alpha+1} = \int_0^1 \frac{d(x+\mathrm{tg}\alpha)}{(x+\mathrm{tg}\alpha)^2+(\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\mathrm{arctg}\frac{x+\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\left[\mathrm{arctg}\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}} - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}\right]$.

2.1052C $I = \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2+\ln x}dx = \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}xdx = \frac{1}{2m}\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}(mx^2)'dx =$

$\frac{1}{2m}e^{mx^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2m}(e^{2m} - e^m) = \frac{1}{m} \Rightarrow e^{2m} - e^m = 2$, $m = \ln 2$.

2.1053C Fie $f(x) = \int_0^{2x^2} e^{2t^2}\sin tdt$ şi $F(t)$ o primitivă a lui $e^{2t^2}\sin t$. Atunci $F'(t) = e^{2t^2}\sin t$ iar $\int_0^{2x^2} e^{2t^2}\sin tdt = F(2x^2) - F(0) = f(x)$, $f'(x) = F'(2x^2)\cdot 4x = e^{2(2x^2)^2}\sin 2x^2\cdot 4x$; deci $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{4x^3} =$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x^4}\sin 2x^2\cdot 4x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{x^2} = 2$.

2.1054C Vezi 1029B.

2.1055C Fie $f : [1,\infty] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 6\ln x - \int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt$ şi $A = f[[1,\infty)]$. Notăm o primitivă a lui $\frac{e^t}{t}$ cu $F(t)$, deci $F'(t) = \frac{e^t}{t}$ şi $\int_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt = F(x^2) - F(1) = G(x)$, $G'(x) = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{e^{x^2}}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}e^{x^2}$. Dar $f'(x) = \frac{6}{x} - G'(x) = \frac{6}{x} - \frac{2}{x}e^{x^2} = \frac{2}{x}(3 - e^{x^2})$ şi f are un punct de maxim în $x = \sqrt{\ln 3}$ de unde $A = (-\infty, f(\sqrt{\ln 3})]$, deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty}(6\ln x - \int_1^x dt) = -\infty$.

2.1056C $I = \int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 [(1-x^2)-1]^2\sqrt{1-x^2}(1-x^2)'dx =$

$\left[-\frac{1}{7}\sqrt{(1-x^2)^7} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right]\Big|_0^1 = \frac{8}{105}$.

Capitolul 3

Geometrie şi trigonometrie

3.1 Vectori. Operaţii cu vectori

3.1057A Pentru orice trei puncte A, B, C din plan este verificată egalitatea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; regula paralelogramului ne dă $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

3.1058A În triunghiul ABC cu A_1, B_1, C_1 mijloacele loturilor BC, CA, AB avem $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$: aplicăm regula paralelogramului $2\,\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\,\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $2\,\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow 2(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = 0$.

3.1059A Valoarea lui $m \in \mathbf{R}$ astfel ca vectorii $\vec{a} = m\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{\imath} + m\vec{\jmath} - 7\vec{k}$ să fie perpendiculari, deci $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 0$ este $m = 4$.

3.1060A Dacă $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ şi $\vec{a} \perp \vec{b}$ atunci $m = (5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 10|\vec{a}|^2 + 6\vec{b} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 10 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3^2 = 13 (\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$.

3.1061A Dacă $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ atunci

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6 + 8 - 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

3.1062A Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ şi $\vec{v} = 3\vec{a} + \vec{b}$ cu $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 30$, este $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{\,}| \cdot |\vec{v}| \sin 30^\circ = |(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})| = |3(\vec{a} \times \vec{a}) + \vec{a} \times \vec{b} + 3(\vec{b} \times \vec{b}) + 9(\vec{b} \times \vec{a})| = |-8(\vec{a} \times \vec{b})| = 8|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 30^\circ = 4$.

3.1063A Volumul piramidei triunghiulare cu vârfurile $A(2,2,2)$, $B(4,3,3)$, $C(4,5,4)$, $D(5,5,6)$ este $V=\frac{7}{6}$. Se aplică formula cu $A_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=\overline{1,4}$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 6 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=\frac{7}{6}$$

3.1064A Valoarea produsului mixt $[(\vec a-\vec b)\times(\vec b-\vec c)]\cdot(\vec c-\vec a)$ este 0:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3\\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}=0$$

3.1065A Vectorul $\vec a=\vec\imath\times(\vec\jmath\times\vec k)+\vec\jmath\times(\vec k\times\vec\imath)+\vec k(\vec\imath\times\vec\jmath)=0$ rezultă din $\vec\imath\cdot\vec\jmath=\vec\jmath\cdot\vec k=\vec k\cdot\vec\imath=0$ ($\vec\imath,\vec\jmath,\vec k$ sunt perpendiculari doi câte doi) şi din dezvoltarea lui $\vec a=\vec\jmath(\vec\imath\cdot\vec k)-\vec k(\vec\imath\cdot\vec\jmath)+\vec k(\vec\jmath\cdot\vec\imath)-\vec\imath(\vec\jmath\cdot\vec k)+\vec\imath(\vec k\cdot\vec\jmath)-\vec\jmath(\vec k\cdot\vec\imath)=0$.

3.1066A În triunghiul ABC punctele M,N sunt definite prin $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Atunci $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$: avem $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}=0$ (vezi 3.1057A) deci $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3.1067A Dacă M este un punct pe latura BC a triunghiului ABC avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$.

3.1068A Vectorii $\vec u=k\vec\imath+2\vec\jmath$, $\vec v=\vec\imath-3\vec\jmath$ sunt coliniari dacă $\frac{k}{1}=\frac{2}{-3}$.

3.1069A Vectorii nenuli $\vec u=xy\vec\imath+y\vec\jmath$, $\vec v=\vec\imath+x\vec\jmath$ sunt coliniari dacă $\frac{xy}{1}=\frac{y}{x}\Rightarrow y(x^2-1)=0$ deci $x^2=1$.

3.1070A Dacă $\vec u=\vec\imath+\vec\jmath$, $\vec v=\vec\imath-2\vec\jmath$, $\vec w=\vec u+\vec v=2\vec\imath-\vec\jmath$, atunci $\alpha=\|\vec w\|=\sqrt{5}$.

3.1071A În planul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec\imath-2\vec\jmath$, $\overrightarrow{OB}=-\vec\imath+3\vec\jmath$, $\overrightarrow{OC}=m\vec\imath+\vec\jmath$, $m\in\mathbf{R}$. Punctele A,B,C sunt coliniare dacă $m=-\frac{1}{5}$: condiţia este ca $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ să fie coliniari, $\overrightarrow{AB}=-2\vec\imath+5\vec\jmath$, $\overrightarrow{AC}=(m-1)\vec\imath+3\vec\jmath$ deci $\frac{m-1}{-2}=\frac{3}{5}\Rightarrow m=-\frac{1}{5}$.

3.1072A Vectorii $\vec u=\vec\imath+\vec\jmath$, $\vec v=2\vec\imath+m\vec\jmath$ sunt perpendiculari $\vec u\perp\vec v$ dacă $\vec u\cdot\vec v=0$, $2+m=0$, deci $m=-2$.

3.1073A Unghiul vectorilor $\vec u=\vec\imath+\sqrt{3}\vec\jmath$, $\vec v=\sqrt{3}\vec\imath+\vec\jmath$ este dat de $\cos\varphi=\frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec u|\cdot|\vec v|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

3.1074A Unghiul φ al vectorilor $\vec u,\vec v$ astfel încât $\|\vec u\|=2$, $\|\vec v\|=3$ şi $\vec u\cdot\vec v=3\sqrt{3}$ este $\varphi=\arccos\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|}=\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot3}=\frac{\pi}{6}$.

3.1075A În $Oxyz$ vectorii $\vec u=\vec\imath+\vec\jmath+\vec k$, $\vec v=2\vec\imath+m\vec\jmath+n\vec k$ sunt coliniari dacă $\frac{1}{2}=\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$, $m=n=2$.

3.1076A Cosinusurile unghiurilor α,β,γ făcute de vectorul $\vec v=2\vec\imath+\sqrt{5}\vec\jmath+4\vec k$ cu axele de coordonate sunt $\cos\alpha=\frac{\vec v\cdot\vec\imath}{\|\vec v\|}=\frac{2}{5}$, $\cos\beta=\frac{\vec v\cdot\vec\jmath}{\|\vec v\|}=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos\gamma=\frac{\vec v\cdot\vec k}{\|\vec v\|}=\frac{4}{5}$.

3.1077A Dacă $\overrightarrow{OA}=\vec\imath-2\vec\jmath$, $\overrightarrow{OB}=2\vec\imath+\vec\jmath$, $\overrightarrow{OC}=3\vec\imath+4\vec\jmath$, atunci unghiul vectorilor $\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BC}$, $\varphi=\arccos\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\overrightarrow{BC}\|}=\arccos\frac{(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})}{\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\|\cdot\|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\|}=\frac{(-\vec\imath-3\vec\jmath)\cdot(\vec\imath+3\vec\jmath)}{\|-\vec\imath-3\vec\jmath\|\cdot\|\vec\imath+3\vec\jmath\|}=\frac{-1-9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=-1$ deci $\varphi=180°$.

3.1078A Norma proiecţiei vectorului $\vec v=\vec\imath-3\vec\jmath+\vec k$ pe vectorul $\vec u=2\vec\imath+\vec\jmath+2\vec k$, $l=\|\mathrm{pr}_{\vec u}\vec v\|=\|\vec v\|\,|\cos\alpha|$, $\cos\alpha=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|}=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\|\vec v\|=\sqrt{11}$ deci $l=\frac{1}{3}$.

3.1079A Fie $\overrightarrow{OA}=\vec\jmath+\vec k$, $\overrightarrow{OB}=2\vec\imath+4\vec\jmath$, $\overrightarrow{OC}=\vec\imath+\vec k$, M mijlocul segmentului AB şi P mijlocul segmentului CM. Atunci $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(4\vec\imath+5\vec\jmath+3\vec k)$. Avem $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})=\frac{1}{4}[\vec\jmath+\vec k+2\vec\imath+4\vec\jmath+2\vec\imath+2\vec k]=\frac{1}{4}(4\vec\imath+5\vec\jmath+3\vec k)$.

3.1080A Să se afle vectorul $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec u$ şi $\|\vec u\|$ dacă $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(-2,4)$. Avem $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\vec u=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=3\vec\imath+5\vec\jmath-2\vec\imath+4\vec\jmath-2\vec\imath-4\vec\jmath=-\vec\imath+5\vec\jmath$, $\|\vec u\|=\sqrt{26}$.

3.1081A Vezi 3.1058A.

3.1082A Vectorii $\vec u=m\vec\imath+\vec\jmath+(m-1)\vec k$ şi $\vec v=\vec\imath+(m+1)\vec\jmath-m\vec k$ sunt coliniari dacă $\frac{m}{1}=\frac{1}{m+1}=\frac{m-1}{-m}$ deci $m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$.

3.1083A Vectorii $\vec u=a\vec\imath+3\vec\jmath$, $\vec v=2\vec\imath+b\vec\jmath$, $a,b\in\mathbf{R}$ sunt ortogonali dacă $2a+3b=0$, deoarece $\vec u\cdot\vec v=2a+3b=0$.

3.1084A Să se determine vectorul $\vec v=x\vec\imath+y\vec\jmath+z\vec k$ cu proprietăţile $\|\vec v\|=2\sqrt3$, $\widehat{(\vec v,\vec a)}=\widehat{(\vec v,\vec b)}$ unde $\vec a=y\vec\imath-2z\vec\jmath+3x\vec k$ şi $\vec b=2z\vec\imath+3x\vec\jmath-y\vec k$ şi $\vec v\perp\vec c$, $\vec c=\vec\imath-\vec\jmath+2\vec k$, unghiul dintre $\vec v$ şi Oy este optuz. Avem $\|\vec b\|(\vec v\cdot\vec a)=\|\vec a\|(\vec v\cdot\vec b)$, $\vec v\cdot\vec c=0$ şi $\vec v\cdot\vec\jmath=y<0$, de unde pentru $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, $\|\vec b\|=\|\vec a\|\neq0$ şi rezultă $\vec v\cdot\vec a=\vec v\cdot\vec b$ sau $2xy-xz+yz=0$. Dar $\vec v\cdot\vec c=0\Rightarrow x-y+2z=0$ şi avem şi $x^2+y^2+z^2=12$; rezolvând sistemul obţinut cu $y<0$ rezultă $x=2$, $y=-2$, $z=-2$, $\vec v=2\vec\imath-2\vec\jmath-2\vec k$.

3.1085A Valoarea expresiei $2\vec k(-\vec\imath+5\vec\jmath)+3\vec\jmath(3\vec\imath-\vec k)+3\vec\imath(5\vec\imath-4\vec\jmath)=15$.

3.1086A Cosinusul unghiului ascuţit φ dintre diagonalele AC şi BD ale paralelogramului cu $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$, $C(-3,3,-3)$, $D(a,b,c)$ necunoscut. $M\left(-\frac{1}{2},2,0\right)$ este intersecţia diagonalelor, $D(a,b,c)$ este dat de egalităţile

$\frac{a+5}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b+2}{2} = 2$, $\frac{-1+c}{2} = 0$ deci $a = -6$, $b = 2$, $c = 1$, $D(-6,2,1)$. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}= -5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}= -11\vec{j} + 2\vec{k}$, $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}} = \frac{4}{25\sqrt{13}}$.

3.1087A Norma vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ unde $\| \overrightarrow{AB}= 3$, $\| \overrightarrow{AC} \| = 4$ iar $\widehat{BAC} = 120°$ este $\sqrt{13}$: $\| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \| \overrightarrow{AB} \|^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \| \overrightarrow{AC} \|^2 = 9 + 16 - 12 = 13$ deoarece $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{2}$.

3.1088A Vectorii $\vec{u} = (\lambda-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{i}+\vec{j}$ sunt paraleli dacă $\frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{-3}{1}$, $\lambda = \frac{1}{4}$.

3.1089A Să se afle coordonatele punctului M pentru care $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}= 0$ unde $A(2,3)$, $B(4,-1)$. $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ sunt coliniari M este la jumătatea lui AB, deci avem $M(3,1)$.

3.1090A Aria triunghiului ABC, ştiind că $A(2,1,-1)$, $B(5,-3,0)$, $C(2,1,1)$ este $S = 5$. Avem $S = \frac{1}{2}\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \frac{1}{2}\|(3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) \times 2\vec{k}\| = \frac{1}{2}\| - 8\vec{i} - 6\vec{j}\| = \frac{1}{2}\sqrt{64+36} = 5$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}= 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}= 2\vec{k}$).

3.1091A Într-un reper cartezian xOy, considerăm punctele A, B, C pentru care $\overrightarrow{OA}= 3\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}= -5\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}= 3\vec{i} - 5\vec{j}$. Patrulaterul $OABC$ este un dreptunghi, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC} \| \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC} \| \overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

3.1092B Nu există un vector $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ care să facă cu axele de coordonate unghiuri de 30°, 60°, 45° deoarece am avea $\vec{v}\cdot\vec{i} = x = \|\vec{v}\|\cos\alpha$, $\vec{v}\cdot\vec{j} = y = \|\vec{v}\|\cos\beta$, $\vec{v}\cdot\vec{k} = z = \|\vec{v}\|\cos\gamma$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = x$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2} = y$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = z$ deci $x^2+y^2+z^2 = (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ fals.

3.1093B Fie vectorii $\overrightarrow{OA}= 9\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}= 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}= 3\vec{k}$. Să se determine punctul M din planul ABC care are toate coordonatele egale. Planul ABC este planul de tăieturi 9,3,3 deci $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ sau $x + 3y + 3z = 9$; punem $y = z = x$ şi obţinem $x = y = z = \frac{9}{7}$.

3.1094B Să se descompună vectorul $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ după vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{k} + \vec{i}$. Scriem $x(\vec{i}+\vec{j}) + y(\vec{j}+\vec{k}) + z(\vec{k}+\vec{i}) = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow x + z = 3, y + x = -1, z + y = 1 \Rightarrow x + y + z = \frac{3}{2}$ deci $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = \frac{5}{2}$ sau $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$.

3.1095B Vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_3 = \vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\vec{k}$ sunt coplanari dacă determinantul având drept linii, coordonatele lui $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ este nul, $\Delta = 8 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{8}{3}$.

3.1096B Fie $ABCD$ un pătrat şi $\overrightarrow{OA}= \vec{a}$, $\overrightarrow{OB}= \vec{b}$, $\overrightarrow{OC}= \vec{c}$, $\overrightarrow{OD}= \vec{d}$. Să se determine expresia $E = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO}$. Deoarece $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$, $E = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OB} = (\vec{b}-\vec{a})\vec{c} + (\vec{c}-\vec{d})\vec{b} = 2\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{d}$.

3.1097B Pentru vectorii $\vec{u}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{u}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{u}_3 = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ niciuna din condiţiile $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$, $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$ nu sunt verificate (deoarece toate coordonatele sunt > 0). De asemenea nu sunt coplanari.

3.1098B În planul xOy se consideră punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ şi un punct $G(x^*,y^*,z^*)$ care verifică relaţia $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}= 0$; care sunt coordonatele lui G? Notăm $G'(a,b)$ simetricul lui G faţă de mijlocul $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ al lui AB şi rezultă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GG'}$, $\overrightarrow{GG'}= -\overrightarrow{GC}$, deci G este centrul de greutate pentru ABC. Evident G este mijlocul lui CG' şi putem scrie $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x^*+a}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y^*+b}{2}$, $x^* = \frac{a+x_3}{2}$, $y^* = \frac{b+y_3}{2}$, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x^*}{2} + x^* - \frac{x_3}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y^*}{2} + y^* - \frac{y_3}{2}$ rezultă $x^* = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y^* = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

3.1099B Să se determine unghiul format de vectorii nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ ştiind că $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_3$ unde $\vec{u}_1 = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{u}_2 = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{u}_3 = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{u}_4 = -\vec{a} + 2\vec{b}$: $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+5\vec{b}) = 3\|\vec{a}\|^2 + 5\|\vec{b}\|^2 + 16\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b}) = -2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2 = -\frac{17}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\|\vec{b}\|^2 = -\frac{41}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{16^2}{17\cdot 41}$.

3.1100B Să se determine un versor $\vec{n}$ perpendicular pe vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{-\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})$.

3.1101B Dacă O, A, B, C sunt necoplanare, atunci expresia $E = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ este egală cu 0: $E = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC}\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$.

3.1102B Fie $\overrightarrow{OA}= 3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}= 4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}= \vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ şi $\overrightarrow{OT}$ astfel ca $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}= \vec{0}$. Atunci $\overrightarrow{OT}= \frac{1}{3}(8\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k})$. Rezultă că $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ sunt coplanari, deci T este în planul ABC şi este centrul de greutate al triunghiului ABC, are coordonatele media aritmetică a coordonatelor (vezi 3.1097B) $T\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

3.1103B În cercul de rază r cu centrul O se duce coarda AB, apoi tangenta BT la cerc şi $AC \perp BT$ ($C \in BT$). Ce condiţie trebuie să satisfacă unghiul $\widehat{AOB} = \alpha$ pentru ca $\| \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} \| < \| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \|$? Problema se reduce la una de geometrie sintetică $CA \cdot CB < r^2 \sin\alpha$ ($CA \perp CB$) deci $\alpha < \frac{\pi}{2}$, aria$ACB <$ ariaAOB în trapezul dreptunghic $OBCA$ (dacă A' este proiecţia lui A pe OB $S_{\triangle AA'B} = S_{\triangle ACB}$ deci $S_{ABC} < S_{OAB}$).

3.1104B Se Consideră un reper cartezian $Oxyz$ şi cubul $OACBO'A'C'B'$ astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OO'}=\vec{k}$. Dacă D este mijlocul laturii $A'O'$ să se determine $\vec{u}=\overrightarrow{AB'}\times\overrightarrow{AD}$ şi unghiul θ dintre vectorii AB' şi AD. Avem $D\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{k}-\vec{i}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{k}$, $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA}=\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}$, $\vec{u}=\overrightarrow{AB'}\times\overrightarrow{AD}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$, $\cos\theta=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$.

3.1105B Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{u}_1=\vec{v}\times\vec{w}$, $\vec{v}_1=\vec{w}\times\vec{u}$, $\vec{w}_1=\vec{u}\times\vec{v}$. Să se afle suma $\vec{a}=\vec{u}_1+\vec{v}_1+\vec{w}_1$. Rezultă $\vec{u}_1=5\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{v}_2=-\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{w}_1=-7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ deci $\vec{a}=-3(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

3.1106B Dacă $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{c}\perp\vec{a}$ avem inegalitatea $S_{ABC}\le S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$. În piramida $OABC$ cu baza ABC, aria laterală $\le$ aria bazei (suma ariilor proiecţiilor $=S_{ABC}\le$ suma ariilor $S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAC}$).

3.1107B Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O şi M un punct din planul paralelogramului. Atunci relaţia $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=K\overrightarrow{MO}$ are loc pentru $k=4$. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$, deci $k=4$.

3.1108B Într-un tetraedru $ABCD$ cu G centrul de greutate şi M arbitrar în spaţiu are loc relaţia $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{MG}$ cu $k=4$. Vectorul de poziţie $\vec{r}$ al unui punct $P(\vec{r})$ care împarte un segment $\overline{AB}$, $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$ într-un raport $k=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ este dat de $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1-k\vec{r}_2}{1-k}$. Pentru $k=-1$ se obţine vectorul de poziţie al mijlocului segmentului, $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$. Fie $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$, $D(\vec{r}_4)$, $G(\vec{r})$ şi $G_1(\vec{\rho})$ centrul de greutate al feţei BCD, $\frac{\overline{GA}}{\overline{GG_1}}=-3$ deci $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1-(-3\vec{\rho})}{1-(-3)}=\frac{\vec{r}_1+3\vec{\rho}}{4}$. Dar centrul de greutate al unui triunghi BCD verifică relaţia $3\vec{\rho}=\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4$ de unde $4\vec{\rho}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4$, adică relaţia cerută ($\overrightarrow{MA}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{MB}=\vec{r}_2$, $\overrightarrow{MC}=\vec{r}_3$, $\overrightarrow{MD}=\vec{r}_4$, $\overrightarrow{MG}=\vec{r}$, $\overrightarrow{MG_1}=\vec{\rho}$).

3.1109B În triunghiul ABC, cu M,N,P mijloacele laturilor BC, CA, AB una din următoarele relaţii este falsă: a) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}$; b) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{BN}$; c) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$; d) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MB}$; e) $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; f) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Avem evident $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ deci f este falsă, celelalte se verifică uşor; se aplică regula paralelogramului eventual sub forma relaţiei lui Chasles $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

3.1110B În trapezul $ABCD$ lungimea bazei AB este de trei ori mai mare decât lungimea bazei CD. Dacă M este un punct oarecare din planul trapezului, să se exprime $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{MC}$ şi $\overrightarrow{MD}$. Avem

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}=0$, $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})$.

3.1111B Dacă E şi F sunt mijloacele diagonalelor AC respectiv AD ale patrulaterului convex $ABCD$, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{EF}$. Avem $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. Dar $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\Rightarrow 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

3.1112B Vectorii $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\ne 0$, $\vec{b}\ne 0$ sunt ortogonali $\Leftrightarrow\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$ (proprietatea rombului): $0=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0$ deci $\|\vec{a}\|=\|\vec{a}\|$.

3.1113B Segmentul $[AB]$ este împărţit de C,D în 3 părţi egale $AC=CD=DB=\frac{1}{3}AB$. Dacă M este un punct oarecare din plan şi notăm $\vec{a}=\overrightarrow{MA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{MB}$ atunci $\overrightarrow{MC}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$. Avem $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{a}+\frac{\overrightarrow{AB}}{3}=\vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ şi analog $\overrightarrow{MD}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$.

3.1114B Punctele A,B,C din plan sunt coliniare $\Leftrightarrow$ pentru un punct O din plan fixat, există numerele α,β,γ nu toate nule astfel încât $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=0$ şi $\alpha+\beta+\gamma=k$ avem $k=0$. A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\alpha\in\mathbf{R}$ deci $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, $(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+la\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=0$ iar $1-\lambda+\lambda-1=0$; reciproc rezultă analog. Generalizare, A,B,C,D din spaţiu sunt coplanare dacă fiind dat un punct O oarecare, există numerele $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R}$ astfel ca $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}=0$ şi $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$.

3.1115B Volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ este $V=5$ Avem formula $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$, $V=|\Delta|$, Δ are drept linii, coordonatele lui $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3.1116B Dacă $ABCD$ este un paralelogram de centru O şi M un punct în plan, relaţia $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ este adevărată pentru orice M din plan: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ (regula paralelogramului).

3.1117B Dacă pe laturile AB şi AC ale unui triunghi ABC luăm $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel ca $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$, $x,y\in\mathbf{R}$ atunci mijlocul P al lui MN se găseşte pe mediana din $A\Leftrightarrow x=y$: Avem $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})$. P se află pe mediană dacă vectorul $\overrightarrow{AA_1}$, al medianei este coliniar cu $\overrightarrow{AP}$. Dar $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, deci $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\alpha\in\mathbf{R}$ sau cum $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt independenţi, rezultă $x=y=\alpha$.

3.1118B Fie $ABCD$ un paralelogram cu centrul M şi N mijlocul lui $\overrightarrow{CD}$, iar $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AM}=2\vec{i}-\vec{j}$. Atunci $\overrightarrow{AN}=\frac{7}{2}\vec{i}-\frac{5}{2}\vec{j}$. Avem $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - (\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ rezultă $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{i} - 2\vec{j}) = \frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$.

3.1119B În xOy se dau vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{u}$ un vector paralel cu înălţimea din A a triunghiului ABC. Atunci $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0 = 3\alpha - 4\beta$, $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, $\vec{u} = \frac{\alpha}{4}(4\vec{i} + 3\vec{j})$ şi luăm $\alpha = 4 \Rightarrow \vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

3.1120B Fie A, B, C, D puncte distincte din spaţiu şi M, N, P definite prin $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MNP atunci $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ vezi 3.1081A.

3.1121B Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped cu baza $ABCD$, O punctul de intersecţie al diagonalelor şi M mijlocul lui AO. Atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. În paralelogramul $ACA'C'$ avem $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$ iar $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AO})$.

3.1122B Într-un patrulater $ABCD$ are loc relaţia $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ pentru orice $M \Leftrightarrow ABCD$ este dreptunghic. Dacă este dreptunghi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ şi $\overrightarrow{MO}^2 = \frac{\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2}{2} - \frac{\overrightarrow{AC}^2}{4} = \frac{\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2}{2} - \frac{\overrightarrow{BD}^2}{4} \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ deci $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. Reciproc dacă relaţia are loc pentru orice M, are loc pentru intersecţia O a diagonalelor deci patrulaterul este inscriptibil, are loc şi când M este unul din vârfuri şi atunci $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{O} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ deci unghiurile lui $ABCD$ sunt drepte.

3.1123C Se dau vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + \vec{j}$ şi se cere $\overrightarrow{OH}$ unde H este piciorul înălţimii din A pe BC. Avem $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AH} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{a} = 0$, $\alpha - 3\beta = 0$, $\alpha = 3\beta$, $\overrightarrow{AH} = \beta(3\vec{i} + \vec{j})$, $\| \overrightarrow{AH} \| = h = |\beta|\sqrt{10}$. Scriem aria lui ABC în două moduri, $\|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \Rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{10}}$ deci $|\beta| = \frac{3}{5}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5}(3\vec{i} + \vec{j})$, $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \frac{14}{5}\vec{i} + \frac{8}{5}\vec{j}$.

3.1124C Într-un plan înzestrat cu reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sunt daţi vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}(\vec{i} + \vec{j})$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ şi se cere $\| \overrightarrow{BM} \|$ şi $\overrightarrow{OM}$ unde M este mijlocul lui AC. Avem $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}$ deci

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{i} - 3\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} + 3\vec{j})$, $\| \overrightarrow{BM} \| = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 3\vec{j}) + \frac{3}{2}(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

3.1125C Se dau vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi se cere vectorul $\overrightarrow{OD}$ astfel ca $ABCD$ să fie paralelogram. Avem $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

3.1126C Dacă ABC este un triunghi şi M un punct din planul său, atunci vectorul $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ se exprimă în funcţie de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, astfel, $\vec{u} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 3(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

3.1127C Locul geometric al punctelor M ştiind că $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{const.}$ unde O, A sunt puncte fixe în spaţiu, este un plan perpendicular pe OA în M' proiecţia lui M pe $\overrightarrow{OA}$: $\| \overrightarrow{OA} \| \cdot \| \overrightarrow{OM} \| \cos\alpha = \text{const.}$

$$OM' = \| \overrightarrow{OM} \| \cos\alpha = \frac{const.}{\|OA\|}.$$

3.1128C În pentagonul regulat $ABCDE$ fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE şi H, K mijloacele segmentelor MP, NQ atunci relaţia $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{HK}$ este adevărată pentru $k = 4$. Avem $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (vezi 3.1419C), $BD = 2l_5 \cos\frac{\pi}{5} = l_5\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $EA + BD = 2MQ$, $2NP = BD$, $MQ = l_5\frac{3+\sqrt{5}}{4}$, $HK = \frac{MQ - NP}{2} = \frac{l_5}{4}$, deci $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{HK}$.

3.1129C Un punct O din planul triunghiului ABC care verifică $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$ coincide cu centrul de greutate (3.1098C); C, O şi C_1 mijlocul lui AB coliniare $- \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC_1}$ iar $\| \overrightarrow{OA} \| = \| \overrightarrow{OB} \| = \| \overrightarrow{OC} \|$ este verificat de centrul cercului circumscris, deci ABC este echilateral.

3.1130C Într-un triunghi ABC cu O, H, G centrul cercului circumscris, ortocentru respectiv centrul de greutate avem (P_1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, (P_2): $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; (P_3): $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$. Se ştie că pentru $(\forall)M$ din plan, $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ (notăm D mijlocul lui BC şi avem $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$, $\frac{GD}{GA} = 2$, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} - (-2)\overrightarrow{MD}}{1 - (-2)} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}$) rezultă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HO}$,

$\overrightarrow{HG}= 2\overrightarrow{GO}$ (dreapta lui Euler, O,G,H coliniare, $2OG = GH$, $3OG = OH$.
3.1131C În hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O avem $\overrightarrow{AD}= x\ \overrightarrow{AB}$ $+y\ \overrightarrow{AF}$ pentru $x = y = 2$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}= 2\overrightarrow{AO}$.
3.1132C În triunghiul ABC, punctele M,N,P definite prin $\overrightarrow{AP}= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CM}= k\overrightarrow{BC}$, $k \in \mathbf{R}$ sunt coliniare pentru $k = 1$: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$ $+ \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}= \left(\frac{1}{2}+k\right)\overrightarrow{AC} - k\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PN}= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{PN}$ atrage $k = 1$.

3.2 Dreapta în plan

3.1133A Cosinusul unghiului ascuţit φ dintre diagonalele AC şi BD ale paralelogramului de vârfuri $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$, $C(-3,3,-3)$ este $\cos\varphi = \frac{43}{25\sqrt{13}}$: notăm cu O centrul paralelogramului, O fiind mijlocul lui AC, $O\left(-\frac{1}{2},2,0\right)$ şi avem $\overrightarrow{AC}= (-3-2,3-1,-3-3) = (-5,2,-6)$, $\overrightarrow{BO}= \left(-\frac{1}{2}-5,2-2,0-(-1)\right) = \left(-\frac{11}{2},0,1\right)$, $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{BO}\|} = \frac{\frac{55}{2}-6}{\sqrt{65}\sqrt{\frac{125}{4}}} = \frac{43}{25\sqrt{13}}$.
3.1134A Patrulaterul cu laturile situate pe dreptele $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$, $x = 2$, $y = -2x + 2$ este trapez dreptunghic deoarece $y = \frac{1}{2}x$ şi $y = \frac{1}{2}x + 1$ sunt paralele, iar $y = -2x + 2$ este perpendiculară pe $y = \frac{1}{2}x$ şi $y = \frac{1}{2}x + 1$.
3.1135A Triunghiul cu laturile situate pe dreptele $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$, $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$, $x - y - 10 = 0$ este isoscel: unghiul φ_1 al dreptelor $y = x - 10$, $y = -\sqrt{3}x - 1$ cu pantele $m_1 = 1$, $m_2 = -\sqrt{3}$ este dat de $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ iar unghiul φ_2 al dreptelor $y = x - 10$ şi $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ de pante $m_1 = 1$ şi $m_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ este dat de $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{m_1-m_3}{1+m_1m_3} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ deci triunghiul este isoscel (se observă şi figurând dreptele).
3.1136A Simetricul punctului $M_0(1,1)$ faţă de dreapta $d : 2x - 3y + 4 = 0$: intersectăm dreapta d_1 prin M_0, $d_1 \perp d$, deci $d_1 : y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$ cu d şi găsim punctul $M_1\left(\frac{7}{13},\frac{22}{13}\right)$ iar simetricul $M_2(x_2,y_2)$ este dat de $\frac{7}{13} = \frac{1}{2}(1 + x_2)$, $\frac{22}{13} = \frac{1}{2}(1 + y_2)$ deci $M_2\left(\frac{1}{13},\frac{31}{13}\right)$.
3.1137A Ecuaţia medianei din B în triunghiul ABC de vârfuri $A(1,1)$, $B(4,5)$ şi $C(13,-4)$ este $13x + 6y - 82 = 0$: fie $M\left(7,-\frac{3}{2}\right)$ mijlocul lui AC;

mediana este dreapta prin B şi M, $\frac{x-4}{7-4} = \frac{y-5}{-\frac{3}{2}-5}$ deci $13x + 6y - 82 = 0$.
3.1138A Vârful $C(x,y)$ al treilea al triunghiului echilateral ABC (cel din semiplanul $y > 0$) unde $A(0,0)$, $B\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ este $C\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$: deoarece $\widehat{BAX} = \frac{\pi}{6}$ şi $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\frac{2}{\sqrt{3}} = \|\overrightarrow{AB}\|$. Altfel, rezolvăm sistemul $x^2+y^2 = \frac{4}{3}$, $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 0$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ în semiplanul $y > 0$.
3.1139A Dreapta paralelă cu $y = 2x$ şi care trece prin $(3,4)$ este $y - 4 = 2(x - 3)$ deci $2x - y - 2 = 0$.
3.1140A Dreapta prin $A(1,2)$, $B(2,5)$ este $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{5-2}$, $y - 3x + 1 = 0$.
3.1141A Fie dreptele $d_1 : 5y - (m + 2)x - 4 = 0$, $d_2 : m^2x + py + 4 = 0$, m, $p \in \mathbf{R}$, $A = \{(m,p)|d_1$ coincide cu $d_2\}$ şi $s = \sum_{(m,p)\in A}(m^2 + p^2)$. Atunci $s = 55$: Dreptele coincid dacă $\frac{5}{p} = \frac{-(m+2)}{m^2} = \frac{-4}{4} \Rightarrow m = -1$ sau $m = 2$ şi $p = -5$ deci $s = 1 + 25 + 4 + 25 = 55$.
3.1142A Dreptele $d_1 : (m + 2)x - 3y - 1 = 0$ şi $d_2 : m^2x - y - 2 = 0$ sunt paralele dacă $\frac{m+2}{m^2} = \frac{-3}{-1}$ deci $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{2}{3}$ iar $s = m_1 + m_2 = \frac{1}{3}$.
3.1143A Fie punctele $A(2,5)$, $B(1,2)$, $C(3,1)$, dreapta $y = mx + n$ care trece prin A şi ese paralelă cu BC şi $s = m + n$. Atunci $s = \frac{11}{2}$: $\overrightarrow{BC}= (3-1,1-2) = (2,-1)$ are panta $m = -\frac{1}{2}$, $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, $y = -\frac{1}{2}x + 6$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 6$, $s = m + n = \frac{11}{2}$.
3.1144A Fie punctele $A(1,-1)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$, dreapta $d : y = mx + n$ înălţimea din A în triunghiul ABC şi $s = m + n$. Atunci $s = -1$: $\overrightarrow{BC}= (3-2,2-1) = (1,1)$ are panta $m_{BC} = 1$, înălţimea este $y + 1 = -(x - 1)$, $y = -x$, $m = -1$, $n = 0$, $s = -1$.
3.1145A Fie $A(5,4)$, $B(4,1)$, $C(8,3)$ şi $y = mx + n$ mediana din A în triunghiul ABC iar $s = m + n$. Atunci $s = 12$: $M(6,2)$ este mijlocul lui BC, dreapta prin M şi A : $\frac{x-5}{6-5} = \frac{y-4}{2-4}$, $y = -2x + 14$, $m = -2$, $n = 14$, $s = 12$.
3.1146A Punctele $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(4,\lambda)$ sunt coliniare dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & \lambda-2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - 8 = 0,\ \lambda = 8.$$

3.1147A $A(2,3)$, $B(-1,4)$, $C(m,m+3)$ coliniare $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ m & m+3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ m-2 & m & 0 \end{vmatrix} = -4m + 2 = 0,\ m = \frac{1}{2}.$$

3.1148A Dreptele $2x-3y-2=0$, $x-y+2=0$, $mx+y-(m-1)=0$ sunt concurente ($\Leftrightarrow$ sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 0$ deci $m=-\frac{5}{9}$.

3.1149A Mediatoarea segmentului OA, $O(0,0)$, $A(4,6)$ este $d: y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$, punctul $\left(\frac{1}{2},4\right)\in d$.

3.1150A Dreptele $x+2y-3=0$, $2x+y+6=0$, $5x+by-1=0$ sunt concurente dacă determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 5 & b & 1 \end{vmatrix} = -78+12b=0$, $b=\frac{13}{2}$.

3.1151A Fie $d: ax+(a-1)y-a+1=0$, $a>1$, $A=d\cap Ox$, $B=d\cap Oy$ şi $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=3$; atunci $a=2$; facem $y=0$ sau $x=0$ şi obţinem $A\left(\frac{a-1}{a},0\right)$, $B(0,1)$ de unde $\frac{a}{a-1}+1=3$, $a>1\Rightarrow a=2$.

3.1152A Fie $A(a,0), B(0,b)$, $a,b\in\mathbf{R}^*$ şi dreapta $y=mx$ perpendiculară pe AB. Atunci $m=\frac{a}{b}$; $AB: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $y=-\frac{b}{a}x+b$, $m=\frac{a}{b}$.

3.1153A Fie $A(2,0), B(0,1), M(a,b)$, $a\neq 0$ astfel ca $M\in\delta: y=mx$ şi $MA\perp MB$, $d=b-a$. Atunci $d=\frac{(m+2)(m-1)}{m^2+1}$: $m_{AM}=\frac{b}{a-2}$; $m_{BM}=\frac{b-1}{a}$, $m_{AM}\cdot m_{BM}=-1$, $\frac{b(b-1)}{a(a-2)}=-1$, $a^2+b^2-2a-b=0$, $b=ma$, $a^2(1+m^2)-a(m+2)=0\Rightarrow a=\frac{m+2}{m^2+1}$, $b=\frac{m(m+2)}{m^2+1}$, $d=b-a=\frac{(m+2)(m-1)}{m^2+1}$.

Altfel, intersectăm cercul $(a-1)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ cu dreapta $b=ma$ în planul aOb (sau notăm $M(x,y)$ şi luăm cercul în planul xOy).

3.1154A Fie $A(a,0), B(0,b)$, C al patrulea vârf al dreptunghiului $OACB$ (unde $O(0,0)$ este originea axelor) deci $C(a,b)$, $M(x_0,y_0)$, $x_0\neq 0$ astfel încât $AM\perp BM$, m_{CM} panta dreptei CM, m_{OM} panta dreptei OM şi $p=m_{CM}\cdot m_{OM}$. Atunci $p=-1$. Rezultă că M este pe cercul circumscris dreptunghiului deci $CM\perp OM$ adică $p=-1$. Prin calcul $m_{CM}=\frac{y_0-b}{x_0-a}$, $m_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$, $p=\frac{y_0^2-by_0}{x_0^2-ax_0}$, dar $(x_0-\frac{a}{2})^2+\left(y_0-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2\Rightarrow x_0^2-ax_0+(y_0^2-by_0)=0$ sau $\frac{y_0^2-by_0}{x_0^2-ax_0}=-1=p$.

3.1155A Distanţa d de la punctul $A(2,3)$ la dreapta $3x-4y-4=0$ este $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 3-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$.

3.1156A Lungimea h a înălţimii din A în triunghiul ABC cu $A(1,0), B(3,2)$, $C(7,-2)$ este $h=2\sqrt{2}$: $h=\frac{2S_{ABC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{1}{\sqrt{(7-3)^2+(-2-2)^2}}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| =$

$2\sqrt{2}$.

3.1157A Fie $M(1,1)$, dreapta $d: 8x-15y-m=0$, mulţimea $A=\{m\in\mathbf{R}|\delta(M,d)=1\}$ şi $s=\sum_{m\in A} m$. Atunci $s=-14$: $\delta(M,d)=\frac{|8\cdot 1-15\cdot 1-1|}{\sqrt{8^2+15^2}}=1$, $|7+m|=17$, $m+7=\pm 17$, $m_1=10$, $m_2=-24$, $s=-14$.

3.1158A Distanţa d dintre dreptele $D_1: 3x-4y-1=0$ şi $D_2: 6x-8y-3=0$ este $d=\frac{1}{10}$: $d=|d((0,0),D_1)-d((0,0),D_2)|=\left|\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}-\frac{|-3|}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|=\frac{1}{10}$ deoarece D_1 şi D_2 sunt de aceeaşi parte a lui $(0,0)$, $-1<0$, $-3<0$.

3.1159A Aria S a triunghiului ABC cu $A(1,1), B(-1,1), C(3,2)$ este

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}\right| = 1.$$

3.1160A Idem 3.1159A.

3.1161A Aria patrulaterului $ABCD$ cu $A(0,2), B(2,3), C(3,1), D(2,0)$ este

$$S=S_{ABC}+S_{CDA}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|\right) = \frac{9}{2}.$$

3.1162A Coordonatele celui de al patrulea vârf $D(x,y)$ al paralelogramului $ABCD$ cu $A(2,1), B(4,2), C(8,2)$ este simetricul vărfului B faţă de mijlocul $O\left(5,\frac{3}{2}\right)$ al lui AC: $5=\frac{4+x}{2}$, $\frac{3}{2}=\frac{2+y}{2}$, $x=6$, $y=1$, $D(6,1)$.

3.1163A Ecuaţia carteziană a dreptei d ce trece prin $A(1,2)$ şi este paralelă cu $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ este $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}$, $2x+y-4=0$.

3.1164A Coordonatele (a,b) ale centrului cercului circumscris triunghiului ABC cu $A(0,1), B(t,0), C(s,0)$, $(a,b)=\left(\frac{t+s}{2},\frac{1+ts}{2}\right)$. Evident $a=\frac{t+s}{2}$, dreapta AB are ecuaţia $y=-\frac{1}{t}x+1$, mediatoarea lui AB este $y-\frac{1}{2}=t\left(x-\frac{t}{2}\right)$ şi intersectăm cele două mediatoare $x=\frac{t+s}{2}$, $y=tx+\frac{1-t^2}{2}$ şi obţinem $y=\frac{1+ts}{2}=b$, deci $(a,b)=\left(\frac{t+s}{2},\frac{1+ts}{2}\right)$. Altfel, scriem că cercul $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ trece prin A, B, C iar $a=\frac{t+s}{2}$: $a^2+(1-b)^2=R^2$, $(t-a)^2+b^2=R^2$, $(s-a)^2+b^2=R^2$ etc.

3.1165A În triunghiul ABC din 3.1164A se cere centrul $Q(a,b)$ al cercului care trece prin mijloacele laturilor lui ABC, $M\left(\frac{t}{2},\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{t+s}{2},0\right)$, $P\left(\frac{s}{2},\frac{1}{2}\right)$ cercul Γ: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, trece prin M, N, P, $\left(\frac{t}{2}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}-b\right)^2=R^2$, $\left(\frac{t+2}{2}-a\right)^2+b^2=R^2$, $\left(\frac{s}{2}-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}-b\right)^2=R^2\Rightarrow a=\frac{s+t}{2}$, $b=\frac{1-st}{4}$.

3.1166B Ortocentrul $H(a,b)$ al lui ABC din 3.1164B: evident $a=0$ deoarece pe axa Oy este înălţimea din A. Dreapta prin A, B : $\frac{x}{t}+\frac{y}{1}=1$, $y=-\frac{1}{t}x+1$,

dreapta prin C perpendiculară pe $AB: y = t(x-s)$ intersectează $x=0$ în $y=-ts$, deci $b=-ts$, $H(0,-ts)$.

3.1167B Intersecţia dreptei $d: ax+(2a+1)y+a^2=0$, $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{2}$ cu axele de coordonate sunt punctele A, B, (d_1) dreapta prin A paralelă cu $y=x$, (d_2) dreapta prin B, $d_2\perp d_1$ şi $a\in\mathbf{R}$ valoarea pentru care intersecţia dintre (d_1) şi (d_2) se găseşte pe $(d_3): x+5y=1$. Atunci $a=\pm 1$. Avem $A=(-a,0)$, $B=\left(0,-\frac{a^2}{2a+1}\right)$, $d_1: y=x+a$; $d_2: y=-x-\frac{a^2}{2a+1}$, intersecţia $d_1\cap d_2 = M\left(-\frac{3a^2+a}{2(2a+1)}, \frac{a^2+a}{2(2a+1)}\right)$ înlocuim în d_3, $-\frac{3a^2+a}{2(2a+1)}+\frac{5a^2+5a}{2(2a+1)}=1$, $a^2=1$, $a=\pm 1$.

3.1168B Fie ABC un triunghi şi $A'B'C'$ triunghiul cu A', B', C' pe laturile $[BC],[CA],[AB]$ astfel ca $\frac{BA'}{A'C}=\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC'}{C'B}=k$. Atunci centrele de greutate ale lui ABC şi $A'B'B'$ coincid. Notăm cu $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ vectorii de poziţie al lui A,B,C şi cu $\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,\vec{\rho}_3$ vectorii de poziţie al lui $A'B'B'$ (faţă de un punct O). Avem $\vec{\rho}_1=\frac{\vec{r}_1-k\vec{r}_2}{1-k}$, $\vec{\rho}_2=\frac{\vec{r}_2-k\vec{r}_3}{1-k}$, $\vec{\rho}_3=\frac{\vec{r}_3-k\vec{r}_1}{1-k}$, $k<0$. Vectorul de poziţie al centrului de greutate $\vec{r}$ respectiv $\vec{\rho}$ este dat de $3\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3$, $3\vec{\rho}=\vec{\rho}_1+\vec{\rho}_2+\vec{\rho}_3=\frac{3\vec{r}-k3\vec{r}}{1-k}=3\vec{\gamma}$, $\vec{\rho}=\vec{\gamma}$.

3.1169B Se dau punctele distincte A, B şi o dreaptă d perpendiculară pe AB într-un punct diferit de A şi B. Dacă M este un punct variabil pe d, atunci locul geometric al punctului P diametral opus lui M, în cercul care trece prin A,B,M este o dreaptă perpendiculară pe AB, simetrică lui d faţă de linia centrelor şi care este dreapta Δ fixă, mediatoarea lui AB.

3.1170B Notăm $M(x_1,y_1)$ şi $P(x_0,y_0)$, parabola $y^2=2px$, $\frac{p}{2}=3$ este $y^2=12x$, tangenta în P este $yy_0=6(x+x_0)$ deci $y=\frac{6}{y_0}x+\frac{6x_0}{y_0}$ perpendiculara dusă în O pe tangenta în P este $y=-\frac{y_0}{6}x$ deci $x_1=\frac{18}{x_0+3}$, $y_1=-\frac{3y_0}{x_0+3}$, $y_0^2=12x_0$ şi eliminăm x_0,y_0 între aceste trei relaţii: $\frac{y_1}{x_1}=-\frac{y_0}{6}$, $\frac{y_1^2}{x_1^2}=\frac{x_0}{3}$, $x_0=\frac{18}{x_1}-3$, $\frac{y_1^2}{x_1^2}=\frac{6}{x_1}-1$ deci $x_1^2+y_1^2-6x_1=0$ $(x_1-3)^2+y_1^2=3^2$ deci un cerc cu centrul în focar şi de rază 3 (deci trece prin O).

3.1171B Dacă $M\left(2,\frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2},3\right)$, $P\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ sunt mijloacele lui BC, AB, BC în triunghiul ABC atunci coordonatele lui A sunt (2,4), $A(2,4)$: notăm $A(x_0,y_0)$ şi $Q(\left(2,\frac{11}{4}\right)$ mijlocul lui NP şi avem $\frac{x_0+2}{2}=2$, $y_0+\frac{3}{2}=2\cdot\frac{11}{4}$, $x_0=2$, $y_0=4$.

3.1172B Fie $A(2,3), B(1,4)$ şi $G(2,4)$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Ecuaţia dreptei d prin A paralelă cu mediana prin C este $y=x+1$. Dacă $M\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ este mijlocul lui AB atunci panta m a lui d este dată de $\overrightarrow{MG}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ deci $m=1$, $d: y-3=x-2$, $y=x+1$.

3.1173B Coordonatele celui de al patrulea vârf $D(x_0,y_0)$ al paralelogramului $ABCD$ cu $A(2,1), B(4,2), C(6,1)$ unde $O=AC\cap BD$, $O(4,1)$ sunt date de $\frac{x_0+4}{2}=4$, $\frac{y_0+2}{2}=1$, $x_0=4$, $y_0=0$ deci este un romb.

3.1174B Fie rombul $ABCD$ cu diagonalele AC pe Ox şi BD pe Oy cu $|AC|=2a>0$, $|BC|=2b>0$ şi ecuaţiile lui AB şi BC, $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$. Atunci $s=m_1+m_2+n_1-n_2=0$. Avem $A(a,0), B(0,b), C(-a,0)$, $D(0,-b)$ deci $AB: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$, $\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}-1=0$, $y=-\frac{b}{a}x+b$, $y=\frac{b}{a}x+b$, $s=0$.

3.1175B Se dau punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $y-2x+1=0$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel cu baza AB iar $d=a-b$. Atunci $d=-\frac{4}{3}$: $\overrightarrow{AB}=2(\vec{i}+\vec{j})$ este paralel cu $y=x$, C este situat pe mediatoarea segmentului AB, $y-4=-(x-2)$, $y=-x+6$, intersectăm dreptele şi obţinem $x=a=\frac{7}{3}$, $y=b=\frac{11}{3}$, $d=\frac{7}{3}-\frac{11}{3}=-\frac{4}{3}$.

3.1176B Fie dreptele $d_1: x-y-1=0$, $d_2: 3x+2y-1=0$, punctul $A(3,5)$, $M(a,b)\in d_2$ şi $N(\alpha,\beta)\in d$, unde N este mijlocul lui AM. Se cere $s=a+b$. Avem $N\left(\frac{3+a}{2},\frac{5+b}{2}\right)$, $\frac{5+b}{2}=\frac{3+a}{2}-1$, $3a+2b=1\Rightarrow a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{11}{5}$, $s=-\frac{2}{5}$.

3.1177B Fie $A(1,0), C(2,m)$, $m\in\mathbf{R}$, B intersecţia dreptei $x+2=0$ cu d_2 perpendiculara în A pe AC, $M=\{m\in\mathbf{R}||AB|=|AC|\}$ şi $s=\sum_{m\in M} m^2$. Atunci $s=18$. $\overrightarrow{AC}$ are panta m, $m_{AC}=m$, $d: y=-\frac{1}{m}(x-1)$, $B\left(-2,\frac{3}{m}\right)$, $|AC|=\sqrt{m^2+1}=\sqrt{9+\frac{9}{m^2}}=|AB|$, $m=\pm 3$, $s=18$.

3.1178B Fie $A(-2,0), B(0,8), C(a,b)$, d paralela la prima bisectoare prin A, $C\in d$ astfel încât ABC este isoscel cu baza AB şi $s=a+b$. Atunci $s=\frac{24}{5}$. Ecuaţia lui $d: y=x+2$, $|AC|=|BC|\Rightarrow (a+2)^2+b^2=a^2+(b-8)^2\Rightarrow a+4b=15$, $b=a+2$ deci $a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{17}{5}$, $s=\frac{24}{5}$.

3.1179B Fie $A(2,0), B(0,4), C(a,4)$ astfel că ABC este isoscel cu baza AB, $M(x_0,y_0)$ centrul cercului circumscris lui ABC şi $d=x_0-y_0$. Atunci $d=-\frac{1}{4}$: $|BC|=|AC|\Rightarrow a^2=(a-2)^2+16$, $a=5$ şi $x_0=\frac{5}{2}$. $|MA|=|MB|\Rightarrow x_0^2+(y_0-4)^2=(x_0-2)^2+y_0^2$, $2y_0=x_0+3$, $y_0=\frac{11}{4}$, $d=-\frac{1}{4}$.

3.1180B Fie $A(1,3), B(3,5), M(a,a)$, $P=MA\cap Ox$, $Q=MP\cap Oy$ şi m coeficientul unghiular al dreptei PQ. Atunci $m=1$. Ecuaţia lui MA: $\frac{x-1}{a-1}=\frac{y-3}{a-3}$ deci $x_P=\frac{2a}{3-a}$, ecuaţia lui MB: $\frac{x-3}{a-3}=\frac{y-5}{a-5}$ deci $y_Q=\frac{-2a}{3-a}$ şi panta $m=-\frac{y_Q}{x_P}=1$.

3.1181B Fie $A(1,2), B(4,0), M(a,b)\in d: y=x-4$, $MA\perp MB$ iar $s=b+a$. Atunci $s=3$: $b=a-4$, $m_{AM}=\frac{b-2}{a-1}$, $m_{BM}=\frac{b}{a-4}$, $m_{AM}\cdot m_{BM}=-1$. $\frac{(b-2)b}{(a-4)(a-1)}=-1\Rightarrow b=-a+3$, $s=b+a=3$.

3.1182B Fie $A(4,0), B(0,5), A'\in Ox$, $B'\in Oy$ cu $|AA'|=|BB'|=m$,

$|OA'| > |OA|$, $|OB'| > |OB|$ şi $C(x_0, y_0)$ intersecţia mediatoarei d a segmentului $A'B'$ cu $y = -x$ iar $d = y_0 - x_0$. Atunci $d = 1$. $m_{A'B'} = -\frac{5+m}{4+m}$, $d : y - \frac{5+m}{2} = \frac{4+m}{5+m}\left(x - \frac{4+m}{2}\right)$ şi rezultă $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $d = 1$.

3.1183B Fie $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$, $d_2 : 3x - 2y + 3 = 0$ şi $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ bisectoarele unghiurilor lui d_1 cu d_2. Atunci $s = m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = -\frac{6}{5}$. Notăm $M_0(x_0, y_0)$ punctele bisectoarelor: $d(M_0, d_1) = \frac{|2x_0 - 3y_0 + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{13}} = d(M_0, d_2) \Rightarrow 2x_0 - 3y_0 = \pm(3x_0 - 2y_0 + 3)$ deci bisectoarele au ecuaţiile: $x + y = -2$, $x - y = -\frac{4}{5}$, $y = -x - 2$, $y = x + \frac{4}{5}$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $n_1 = -2$, $n_2 = \frac{4}{5}$, $s = -\frac{6}{5}$.

3.1184B Fie $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ punctul $A(1, 0)$, $d_2 : y = x - 1$, $d_3 : y = -x + 1$ şi S aria triunghiului determinat de d_1, d_2, d_3. Atunci $S = \frac{9}{5}$. $B = d_1 \cap d_3 = B\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)$, $C = d_1 \cap d_2 = C(4, 3)$, $S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{9}{5}$.

3.1185B Fie $A(1, 0), B(1, 3), C(3, 1), D(4, 2), M(x_0, y_0)$ şi $\mathcal{M} = \{M(x_0, y_0) | M$ se află pe dreapta $y = x$ şi $S_{AMB} = S_{CMD}\}$. Atunci $s = \sum_{M \in \mathcal{M}} (x_0 + y_0) = 4$.

$S_{AMB} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}\right| = S_{CMD} \Rightarrow 3(|x_0 - 1|) - 2$, $x_0 = \frac{5}{3}$, $y_0 = \frac{1}{3}$, $s = 4$.

3.1186C Fie $A(3, 0), B(0, 3)$ şi $C(a, b) \in d : y + x = 8$ astfel încât ABC este isoscel cu baza AB iar $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC, $s = x_0 + y_0$. Atunci $s = \frac{24}{5}$. Evident C este situat şi pe prima bisectoare $y = x$, deci $a = b = 4$, ecuaţia dreptei BC este $\frac{x}{4} = \frac{y-3}{4-3}$, $y = \frac{1}{4}x + 3$ iar înălţimea din A este $y = -4x + 12$. Se obţine $x_0 = y_0 = \frac{12}{5}$, $s = \frac{24}{5}$.

3.1187C Fie dreapta $d : y = 2x + b$ şi A_b, B_b intersecţiile ei cu axa Ox respectiv axa Oy iar dreapta d_1 de pantă 3 dusă prin A_b, dreapta d_2 de pantă (-1) dusă prin B_b. Locul lui $M = d_1 \cap d_2$ când b variază este $y = -9x$. Avem $A_b\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$, $B_b(0, b)$, $d_1 : y = 3\left(x + \frac{b}{2}\right)$, $d_2 : y = -x + b$ şi eliminăm b între cele două relaţii, obţinem $y = -9x$.

3.1188C Fie $M(x_0, y_0) \in d : y = x + 1$ variabil, P proiecţia lui M pe dreapta $x = 3$ şi Q mijlocul lui PM. Atunci locul geometric al lui Q este dreapta mediană din $A(3, 4) = (x = 3) \cap (y = x + 1)$ în triunghiul ABC dreptunghic în B, unde $B(3, 0)$, $C(-1, 0) : y_0 = x_0 + 1$, $x_Q = \frac{x_0+3}{2}$, $y_Q = y_P = y_0 = x_0 + 1$, $x_0 = y_Q - 1$, $x_Q = \frac{y_Q - 1 + 3}{2}$, $y_Q = 2(x_Q - 1)$.

3.3 Conice

3.1189A Semiaxele a, b ale elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cu distanţa focală $2c = 8$ şi care trece prin $M(\sqrt{15}, -1)$ sunt $a = \sqrt{20}$, $b = 2 : c^2 = a^2 - b^2 = 16$, $\frac{15}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, $c^2 < a^2$.

3.1190A Aria Δ_{ORS} unde $R = \Gamma \cap Ox$, $S = \Gamma \cap d$, $\Gamma : x^2 + y^2 - 6x = 0$, $d : y = x$ este 9: avem $R(6, 0)$ şi $S(3, 3)$, deci aria $\Delta_{ORS} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$.

3.1191A Ecuaţia elipsei cu focarele $F'(-3, 0)$, $F(3, 0)$ şi care trece prin $M(4, 1)$ este $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 : \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, $c^2 = a^2 - b^2 = 9$, $a^2 = 18$, $b^2 = 9$.

3.1192A Ecuaţia cercului care trece prin $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ este $x^2 + y^2 - ax - by = 0 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$.

3.1193A Ecuaţia tangentei în $A(2, 0)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ este $x + 2y = 2$: $xx_0 + yy_0 - 3(x + x_0) - 2(y + y_0) + 8 = 0$, $2x + y \cdot 0 - 3(x + 2) - 2(y + 0) + 8 = 0$.

3.1194A Parabola $y^2 = x$ are ca focar punctul $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$: $y^2 = 2px$, $2p = 1$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$.

3.1195A Dacă $x^2 + y^2 - a = 0$ este ecuaţia unui arc atunci evident $a \geq 0$.

3.1196A Suma semiaxelor elipsei $4x^2 + y^2 = 1$ este $\frac{3}{2} : \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$.

3.1197A Punctul $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ aparţine elipsei $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Se verifică grila.

3.1198A Punctul $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$ aparţine hiperbolei $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Verifică grila.

3.1199A Dacă (a, b) este centrul iar R raza cercului $x^2 + y^2 - x - y = 0$ atunci $s = a^2 + b^2 + R^2$ este egal cu 1: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

3.1200A Distanţa $d(M, C)$ unde $M(1, 1)$ iar $C(1, 0)$ este centrul cercului $x^2 + y^2 - 2x = 0$ este 1.

3.1201A Distanţa $d(C_1, C_2)$ între centrele $C_1(1, 1)$, $C_2(-2, 3)$ ale cercurilor $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ este $d(C_1, C_2) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$.

3.1202A Punctul (1,2) se află în interiorul discului $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq (\sqrt{2})^2$.

3.1203A Cercul de diametru AB, unde $A(-3, 4)$, $B(1, 2)$, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$ conţine în interior punctul (1,3), deoarece $d((-1, 3), (1, 3)) < \sqrt{5}$.

3.1204A Dacă $C(a, b)$ este centrul cercului de rază R tangent axei Oy în (0,0) şi care trece prin $A(2, 2)$ atunci $R = 2$, $a = R = 2$, $b = 0$, $s = a + b + R = 4$.

3.1205A Dacă a este semiaxa mare a elipsei ce trece prin (4,3) şi are semiaxa mică $b = \sqrt{10}$, atunci $a = 4\sqrt{10}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{16}{a^2} + \frac{9}{10} = 1$.

3.1206A Hiperbola $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu $b = 2$ şi $(3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}) \in H$ are $a = 3$.
3.1207A Parabola $P: y^2 = 2px$, cu $(1,2) \in P$ are d(focar, directoare)$= 2$, $\frac{p}{2} = 2$.
3.1208A Fie $C_1(a_1, b_1)$ şi $C_2(a_2, b_2)$ centrele a două cercuri tangente exterior şi tangente totodată dreptelor Ox şi $x-2=0$. Atunci $p = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = 0$ în patru cazuri dar în alte patru $p \neq 0$.
3.1209A În elipsa $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ cu focarele $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ şi vârfurile $B(0,2)$, $C(0,-2)$ pătratul BF_1CF_2 are aria $S = (2\sqrt{2})^2 = 8$.
3.1210A Idem 3.1209A, $F(c,0)$, $c = 2$ un focar $A(2\sqrt{2}, 0)$, $B(0,2)$ unghiul $\widehat{BFA} = \frac{3\pi}{4}$ deoarece $OF = 2$, $OB = 2$, $\frac{OB}{OF} = \operatorname{tg}\widehat{BFO} = 1$, $\widehat{BFO} = \frac{\pi}{4}$.
3.1211A Dreapta $3x - 2y + 4 = 0$ este tangentă parabolei $y^2 = 2px$ dacă ecuaţia $y^2 = 2p\left(\frac{2y-4}{3}\right) = 0$ are rădăcini duble, $\Delta = \frac{4p^2}{9} - \frac{8p}{3} = 0$, $p = 6$.
3.1212A Fie d tangenta la parabola $y^2 = 2ox$ paralelă cu $y = 5x + 3$. $P = d \cap Oy$ şi n ordonata lui P. Atunci $n = 1$: intersectăm $y = 5x + m$ cu $y^2 = 2ox$, ecuaţia $\Delta = 25(n-2)^2 - 25n^2 = 0$ are rădăcina $n = 1$.
3.1213A Dacă $y = mx + n$ este tangentă la parabola $y^2 = 12x$ şi $u = mn$, atunci $u = 3$: ecuaţia $(mx + n)^2 = 12x$ are soluţie dublă dacă $\Delta = (mn - 6)^2 - m^2n^2 = 0$ deci $u = 3$.
3.1214A Dacă $y = x + n$ determină în parabola $y^2 - 10x = 0$ o coardă de lungime $2\sqrt{10}$ atunci $n = 2$: $\begin{cases} y = x + n \\ y^2 = 10x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 10(y - n) \Rightarrow$

$\begin{cases} x_{1,2} = 5 - n \pm \sqrt{25 - 10n} \\ y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 10n} \end{cases}$. $40 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 8(25 - 10n)$.

3.1215A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1, 2\sqrt{2})$ la cercul $x^2 + y^2 = 9$ şi $c = \frac{n}{m}$, atunci $c = -9 : xx_0 + yy_0 - 9 = 0$, $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$, $m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$, $c = -9$.
3.1216A Dacă $y = m_1x$, $y = m_2x$ sunt tangentele din $O(0,0)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$, atunci $m_1 \cdot m_2 = 1$: $y = mx$ este tangentă la cerc dacă ecuaţia $(1 + m^2)x^2 - 6(m + 1)x + 14$, are $\Delta = -5m^2 + 18m - 5 = 0$, deci $m_1m_2 = 1$.
3.1217A Tangenta $ax + by + c = 0$ la elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ în $M(6,4)$ ne dă $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8} : \frac{xx_0}{100} + \frac{yy_0}{25} - 1 = 0$, $\frac{6}{100}x + \frac{4}{25}y - 1 = 0$, $a = \frac{3}{50}$, $b = \frac{4}{25}$, $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8}$.
3.1218A Dacă $y = x + 3$ este tangentă elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 5$: ecuaţia $\frac{x^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$ are rădăcină dublă dacă $\Delta = \frac{9}{b^4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{9}{b^2} - 1\right) = 0$, $b^2 = 5$.
3.1219A Dacă $ax + by + c = 0$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ în $(6,5)$ atunci $s = \frac{a}{b} = -\frac{3}{2} : \frac{xx_0}{16} - \frac{yy_0}{20} = 1$, $\frac{3x}{8} - \frac{y}{4} = 1$, $s = \frac{3}{-2}$.

3.1120A Dacă $y = \frac{5}{4}x - 4$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 9$, vezi 3.1218A.
3.1221A Tangentele sunt $d: \frac{xx_0}{25} + \frac{yy_0}{16} = 1$, $x = -5$ (în A'), $x = 5$ (în A) deci $A'Q = y_Q = \frac{16}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{5}\right)$, $AP = y_P = \frac{16}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{5}\right)$, $A'Q \cdot AP = \frac{16^2}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{25}\right) = 16$, deoarece $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
3.1222A Pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punctele $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ în care tangentele sunt paralele, sunt simetrice faţă de $O(0,0)$, deci $s = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$.
3.1223A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în (1,2) la parabola $y^2 = 4x$ atunci $s = m + n = 2 : yy_0 = 2(x + x_0)$, $2y = 2(x + 1)$, $m = n = 1$, $s = 2$.
3.1224B Cercul $C: x^2 + y^2 - 6x = 0$ şi elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ se intersectează în 2 puncte .
3.1225C Pentru familia de elipse (E_{y_0}) : $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - y_0)^2}{4} = 1$ avem $D = \bigcup_{y_0 \in [-1,1]} E_{y_0} \subset [-4,4] \times [-3,3]$: rezultă $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y_0 \leq 1 \Rightarrow$ $-1 - 2 \leq y \leq 1 + 2$.
3.1226B Dintre cercurile $C_1: (x-2)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$, $C_2: (x-4)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$, $C_3: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ sunt tangente la $d: y = x$, C_1, C_2: distanţele de la centre la d sunt $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
3.1227B Curba dată de $x = 2 + \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $t \in [0, \pi]$ este semicerc: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y \geq 1$.
3.1228B Mijloacele coardelor unei elipse, paralele cu o dreaptă fixată descriu un segment prin $O(0,0)$: considerăm elipsa raportată la axe, $x_0 = a\cos t$, $y_0 = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, m o pantă fixată; dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$, $y - b\sin t = m(x - a\cos t)$, intersectează elipsa în $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_1, x_2 soluţii ale ecuaţiei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - ma\cos t + b\sin t)^2}{b^2} = 1$ unde $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$), $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{ma^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$, $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{m^2a^2 - b^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$. Deci $X = \frac{x_1+x_2}{2}$, $Y = \frac{y_1+y_2}{2}$ verifică $\frac{Y}{X} = \frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2}$.
3.1229B Aria patrulaterului determinat de tangentele la hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ în punctele $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$, $C(-\sqrt{2}, -1)$, $D(\sqrt{2}, -1)$ este $S = \sqrt{2}$: din simetrie rezultă că patrulaterul este un dreptunghi dat de intersecţia dreptelor $(xx_0 - yy_0 = 1)$: $y = \pm\sqrt{2}x - 1$, $y = \mp\sqrt{2}x + 1$ deci vârfurile sunt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dar $S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$.
3.1230B Cercul cu centrul $A(1,-3)$ şi tangent dreptei $d: y = 2$ are raza $5: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, $d(A,d) = 5$.

3.1231B Valoarea lui a astfel ca $d: 2x+y=0$ să fie tangentă cercului $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ este ??

3.1232B Focarele elipsei raportată la axe care trece prin $A(2,0)$, $B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt $F'(-\sqrt{3},0)$, $F(\sqrt{3},0)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{4}{a^2}=1\Rightarrow a=2$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

3.1233B Punctul $A(\alpha,\beta)\in C: x^2-y^2=1$ astfel ca VA, $V(1,0)$, să fie paralelă cu $d: y-x\sqrt{3}=-1$ este $A(2,\sqrt{3})$: $A=C\cap d_1$, $d_1: y=\sqrt{3}(x-1)$, $x^2-3x+2=0$.

3.1234B Punctul $M(x,y)\in C: y^2=16x$, $y>0$ astfel ca $d(M,\text{focar})=8$ este $M(4,8)$: $16=2p\Rightarrow p=8$, $\frac{p}{2}=4$, $d((x,y),(4,0))=\sqrt{(x-4)+y^2}=8$, $x^3+8x-48=0$, $x=4$, $y=8$.

3.1235B Fie $F(-2,0)$, $F(2,0)$. Locul geometric al punctelor M astfel încât $d(M,F')+d(M,F)=6$ este elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$: semiaxa mare $a=2+x$, unde $x+x+4=6$ deci $x=1$, $a=3$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

3.1236B Distanţa de la $A(10,2)$ la tangenta în $B(3,5)$ la elipsa $25x^2+9y^2=450$ este $d=\frac{13\sqrt{34}}{17}\cdot 25xx_0+9yy_0=450$, $5x+3y-30=0$, $d=\frac{|50+6-30|}{\sqrt{25+9}}$.

3.1237B Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cu un focar $F(\sqrt{13},0)$ şi o asimptotă $3x-2y=0$ are $a=2, b=3$: $c^2=a^2+b^2=13$, $bx-ay=0\Rightarrow a^2=4$, $b=3$.

3.1238B Aria patrulaterului format din tangentele duse din $A(-1,0)$ la parabola $y^2=2x$ şi normalele duse în punctele de tangenţă este $S=3\sqrt{2}$. Intersectăm $y=m(x+1)$ cu $y^2=2x$, $m^2+2(m^2-1)x+m^2=0$, rădăcină dublă înseamnă $\Delta=-2m^2+1=0$ deci $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se obţine patrulaterul $ABCD$, $A(-1,0)$, $B(1,\sqrt{2})$, $C(2,0)$, $D(1,-\sqrt{2})$.

3.1239B Tangenta la parabola de focar $F(1,0)$ şi directoarea $x=-1$ în $M(4,y_0)$, $y_0>0$ este $x-2y+4=0$: $\frac{p}{2}=1$, $y^2=4x$, $yy_0=2(x+x_0)$, $y_0^2=16$, $y_0=4$, $x_0=4$.

3.1240B Aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ şi dreapta $9x+2y=24$ este $S=12$. Asimptotele sunt $3x=\pm 2y$ iar vârfurile triunghiului $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(4,-6)$ deci $S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&3\\4&-6\end{vmatrix}\right|=12$.

3.1241B Ecuaţia axei radicale a cercurilor $x^2+y^2-3x-4=0$, $x^2+y^2+y-2=0$ se obţine scăzând ecuaţiile: $3x+y+2=0$.

3.1242B Locul geometric al centrelor cercurilor $C_\lambda: x^2+y^2+\lambda x+(2\lambda+3)y=0$, $\alpha\in\mathbf{R}$ se obţine eliminând λ între relaţiile $x=-\frac{\lambda}{2}$, $y=-\frac{2\lambda+3}{2}$: $4x-2y=3$.

3.1243B $ax^2+(1-a)y^2=1$ este elipsa (cerc) sau hiperbolă, nu parabolă.

3.1244B Asimptotele hiperbolei $x^2-y^2=1$ sunt $y=\pm x$, deci între ele au unghiul $\frac{\pi}{2}$.

3.1245B Fie $M(1,1)$, F_1,F_2 focarele elipsei $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $d_1=|MF_1|$, $d_2=|MF_2|$ şi $s=d_1^2+d_2^2$. Atunci $s=36$: $c=\sqrt{25-9}=4$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $d_1^2=5^2+1=26$, $d_2^2=3^2+1=10$.

3.1246B Fie cercul $(x+1)^2+y^2=1$, $C(-1,0)$ centrul său, $A(x_0,y_0)\in d: y=x$, $x_0>0$, $|AC|=5$ şi $s=x_0+y_0$. Atunci $s=2$. $y_0=x_0$, $(x_0+1)^2+x_0^2=25$, $x_0=y_0=3$, $s=6$.

3.1247B Fie $C(a,b)$ centrul cercului care trece prin $(-2,0),(2,2),(0,0)$ şi $s=a+b$. Atunci $s=2$: cercul este $x^2+y^2-2ax-2by=0$, $a=-1, b=3$.

3.1248B Cercul $x^2+y^2+2mx+2ny=0$ este tangent în $(1,3)$ dreptei $y=3$. Atunci $s=m+n=-\frac{7}{3}$: $xx_0+yy_0+m(x+x_0)+n(y+y_0)=0$, $(1+m)x+(3+n)y+m+3n\Rightarrow m=-1$, $-\frac{3n-1}{n+3}=3$, $n=-\frac{4}{3}$.

3.1249B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=9$ cu focarele $F_1(3\sqrt{2},0)$, $F_2(-3\sqrt{2},0)$, $O(0,0)$ şi $s=|OM|^2-|MF_1|\cdot|MF_2|$. Atunci $s=0$: $|MF_1|=\frac{c}{a}x_0+a$, $|MF_2|=\frac{c}{a}x_0-a$, $|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{c^2}{a^2}x_0^2-a^2$, $d=a^2-b^2=9-9=0$.

3.1250B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=a^2$, $N(x_0,0)$ şi p puterea lui N faţă de cercul $x^2+y^2=a^2$. Dacă $d=|MN|^2-p$, atunci $d=0$. Avem $p=x_0^2-a^2$, $MN^2=y_0^2$, $d=y_0^2-(x_0^2-a^2)=-(x_0^2-y_0^2)+a^2=0$.

3.1251B Fie $d: x-2=0$ şi o dreaptă variabilă prin $O(0,0)$, $d_1: y=mx$ care taie pe d în $N(2,2m)$. Perpendiculara în N pe d este $y=2m$ iar perpendiculara în O pe ON este $y=-\frac{1}{m}x$. Eliminăm m şi rezultă $y^2=-2x$.

3.1252B Fie $M=\{m\in\mathbf{R}|$ dreapta $2mx+(1-m^2)y+3(1+m^2)=0$ este tangentă cercului $x^2+y^2=9\}$. Atunci $M=\mathbf{R}$. Intersectăm cercul cu dreapta şi obţinem $(m^2+1)^2x^2+12m(m^2+1)x+36m^2=0$ cu $\Delta=0$ $\forall m\in\mathbf{R}$, deci soluţie dublă.

3.1253B Fie $y=mx+n$ perpendiculară pe $2y+x+1=0$ şi tangentă cercului $x^2+y^2=9$ iar $s=m^2+n^2$. Rezultă $m=2$, $n^2=45$ şi $s=m^2+n^2=45$.

3.1254B Cercurile $x^2+y^2-2x-2y=7$ şi $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$ sunt tangente exterior dacă distanţa între centre $C_1(1,1)$, $C_2(5,4)$ este egală cu suma razelor: $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$, $d((1,1),(5,4))=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$, $5=3+r$, $r=2$.

3.1255B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ în $N(\alpha,\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2})$ şi asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$ în $M(\alpha,\pm\frac{b}{a}\alpha)$ iar axa Ox în $P(\alpha,0)$. Rezultă $|PM|^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2$, $\overline{PN}^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2$, deci $\delta=|PM|^2-|PN|^2=b^2$.

3.1256B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ în $M\left(\alpha,\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}\right)$,

3.1206A Hiperbola $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu $b = 2$ şi $(3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}) \in H$ are $a = 3$.

3.1207A Parabola $P: y^2 = 2px$, cu $(1,2) \in P$ are d(focar, directoare)$= 2$, $\frac{p}{2} = 2$.

3.1208A Fie $C_1(a_1, b_1)$ şi $C_2(a_2, b_2)$ centrele a două cercuri tangente exterior şi tangente totodată dreptelor Ox şi $x-2=0$. Atunci $p = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = 0$ în patru cazuri dar în alte patru $p \neq 0$.

3.1209A În elipsa $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ cu focarele $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ şi vârfurile $B(0,2)$, $C(0,-2)$ pătratul BF_1CF_2 are aria $S = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

3.1210A Idem 3.1209A, $F(c,0)$, $c = 2$ un focar $A(2\sqrt{2}, 0)$, $B(0,2)$ unghiul $\widehat{BFA} = \frac{3\pi}{4}$ deoarece $OF = 2$, $OB = 2$, $\frac{OB}{OF} = \operatorname{tg}\widehat{BFO} = 1$, $\widehat{BFO} = \frac{\pi}{4}$.

3.1211A Dreapta $3x - 2y + 4 = 0$ este tangentă parabolei $y^2 = 2px$ dacă ecuaţia $y^2 = 2p\left(\frac{2y-4}{3}\right) = 0$ are rădăcini duble, $\Delta = \frac{4p^2}{9} - \frac{8p}{3} = 0$, $p = 6$.

3.1212A Fie d tangenta la parabola $y^2 = 2ox$ paralelă cu $y = 5x + 3$. $P = d \cap Oy$ şi n ordonata lui P. Atunci $n = 1$: intersectăm $y = 5x + m$ cu $y^2 = 2ox$, ecuaţia $\Delta = 25(n-2)^2 - 25n^2 = 0$ are rădăcina $n = 1$.

3.1213A Dacă $y = mx + n$ este tangentă la parabola $y^2 = 12x$ şi $u = mn$, atunci $u = 3$: ecuaţia $(mx + n)^2 = 12x$ are soluţie dublă dacă $\Delta = (mn - 6)^2 - m^2n^2 = 0$ deci $u = 3$.

3.1214A Dacă $y = x + n$ determină în parabola $y^2 - 10x = 0$ o coardă de lungime $2\sqrt{10}$ atunci $n = 2$: $\begin{cases} y = x + n \\ y^2 = 10x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 10(y - n) \Rightarrow$

$\begin{cases} x_{1,2} = 5 - n \pm \sqrt{25 - 10n} \\ y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 10n} \end{cases}$. $40 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 8(25 - 10n)$.

3.1215A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1, 2\sqrt{2})$ la cercul $x^2 + y^2 = 9$ şi $c = \frac{n}{m}$, atunci $c = -9 : xx_0 + yy_0 - 9 = 0$, $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$, $m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$, $c = -9$.

3.1216A Dacă $y = m_1x$, $y = m_2x$ sunt tangentele din $O(0,0)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$, atunci $m_1 \cdot m_2 = 1$: $y = mx$ este tangentă la cerc dacă ecuaţia $(1 + m^2)x^2 - 6(m + 1)x + 14$, are $\Delta = -5m^2 + 18m - 5 = 0$, deci $m_1m_2 = 1$.

3.1217A Tangenta $ax + by + c = 0$ la elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ în $M(6,4)$ ne dă $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8} : \frac{xx_0}{100} + \frac{yy_0}{25} - 1 = 0$, $\frac{6}{100}x + \frac{4}{25}y - 1 = 0$, $a = \frac{3}{50}, b = \frac{4}{25}$, $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8}$.

3.1218A Dacă $y = x + 3$ este tangentă elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 5$: ecuaţia $\frac{x^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$ are rădăcină dublă dacă $\Delta = \frac{9}{b^4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{9}{b^2} - 1\right) = 0$, $b^2 = 5$.

3.1219A Dacă $ax + by + c = 0$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ în $(6,5)$ atunci $s = \frac{a}{b} = -\frac{3}{2} : \frac{xx_0}{16} - \frac{yy_0}{20} = 1$, $\frac{3x}{8} - \frac{y}{4} = 1$, $s = \frac{3}{-2}$.

3.1220A Dacă $y = \frac{5}{4}x - 4$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 9$, vezi 3.1218A.

3.1221A Tangentele sunt $d: \frac{xx_0}{25} + \frac{yy_0}{16} = 1$, $x = -5$ (în A'), $x = 5$ (în A) deci $A'Q = y_Q = \frac{16}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{5}\right)$, $AP = y_P = \frac{16}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{5}\right)$, $A'Q \cdot AP = \frac{16^2}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{25}\right) = 16$, deoarece $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3.1222A Pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punctele $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ în care tangentele sunt paralele, sunt simetrice faţă de $O(0,0)$, deci $s = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$.

3.1223A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1,2)$ la parabola $y^2 = 4x$ atunci $s = m + n = 2 : yy_0 = 2(x + x_0)$, $2y = 2(x + 1)$, $m = n = 1$, $s = 2$.

3.1224B Cercul $C: x^2 + y^2 - 6x = 0$ şi elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ se intersectează în 2 puncte .

3.1225C Pentru familia de elipse (E_{y_0}) : $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - y_0)^2}{4} = 1$ avem $D = \bigcup_{y_0 \in [-1,1]} E_{y_0} \subset [-4,4] \times [-3,3]$: rezultă $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y_0 \leq 1 \Rightarrow$ $-1 - 2 \leq y \leq 1 + 2$.

3.1226B Dintre cercurile $C_1: (x-2)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$, $C_2: (x-4)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$, $C_3: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ sunt tangente la $d: y = x$, C_1, C_2: distanţele de la centre la d sunt $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

3.1227B Curba dată de $x = 2 + \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $t \in [0, \pi]$ este semicerc: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y \geq 1$.

3.1228B Mijloacele coardelor unei elipse, paralele cu o dreaptă fixată descriu un segment prin $O(0,0)$: considerăm elipsa raportată la axe, $x_0 = a\cos t$, $y_0 = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, m o pantă fixată; dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$, $y - b\sin t = m(x - a\cos t)$, intersectează elipsa în $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_1, x_2 soluţii ale ecuaţiei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - ma\cos t + b\sin t)^2}{b^2} = 1$ unde $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$), $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{ma^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m^2a^2 - b^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$. Deci $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $Y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ verifică $\frac{Y}{X} = \frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2}$.

3.1229B Aria patrulaterului determinat de tangentele la hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ în punctele $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$, $C(-\sqrt{2}, -1)$, $D(\sqrt{2}, -1)$ este $S = \sqrt{2}$: din simetrie rezultă că patrulaterul este un dreptunghi dat de intersecţia dreptelor $(xx_0 - yy_0 = 1)$: $y = \pm\sqrt{2}x - 1$, $y = \mp\sqrt{2}x + 1$ deci vărfurile sunt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dar $S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$.

3.1230B Cercul cu centrul $A(1,-3)$ şi tangent dreptei $d: y = 2$ are raza $5: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, $d(A,d) = 5$.

3.1231B Valoarea lui a astfel ca $d: 2x+y=0$ să fie tangentă cercului $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ este ??

3.1232B Focarele elipsei raportată la axe care trece prin $A(2,0)$, $B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt $F'(-\sqrt{3},0)$, $F(\sqrt{3},0)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{4}{a^2}=1\Rightarrow a=2$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

3.1233B Punctul $A(\alpha,\beta)\in C: x^2-y^2=1$ astfel ca VA, $V(1,0)$, să fie paralelă cu $d: y-x\sqrt{3}=-1$ este $A(2,\sqrt{3})$: $A=C\cap d_1$, $d_1: y=\sqrt{3}(x-1)$, $x^2-3x+2=0$.

3.1234B Punctul $M(x,y)\in C: y^2=16x$, $y>0$ astfel ca $d(M,\text{focar})=8$ este $M(4,8)$: $16=2p\Rightarrow p=8$, $\frac{p}{2}=4$, $d((x,y),(4,0))=\sqrt{(x-4)+y^2}=8$, $x^3+8x-48=0$, $x=4$, $y=8$.

3.1235B Fie $F(-2,0)$, $F(2,0)$. Locul geometric al punctelor M astfel încât $d(M,F')+d(M,F)=6$ este elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$: semiaxa mare $a=2+x$, unde $x+x+4=6$ deci $x=1$, $a=3$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

3.1236B Distanţa de la $A(10,2)$ la tangenta în $B(3,5)$ la elipsa $25x^2+9y^2=450$ este $d=\frac{13\sqrt{34}}{17}\cdot 25xx_0+9yy_0=450$, $5x+3y-30=0$, $d=\frac{|50+6-30|}{\sqrt{25+9}}$.

3.1237B Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cu un focar $F(\sqrt{13},0)$ şi o asimptotă $3x-2y=0$ are $a=2, b=3$: $c^2=a^2+b^2=13$, $bx-ay=0\Rightarrow a^2=4$, $b=3$.

3.1238B Aria patrulaterului format din tangentele duse din $A(-1,0)$ la parabola $y^2=2x$ şi normalele duse în punctele de tangenţă este $S=3\sqrt{2}$. Intersectăm $y=m(x+1)$ cu $y^2=2x$, $m^2+2(m^2-1)x+m^2=0$, rădăcină dublă înseamnă $\Delta=-2m^2+1=0$ deci $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se obţine patrulaterul $ABCD$, $A(-1,0)$, $B(1,\sqrt{2})$, $C(2,0)$, $D(1,-\sqrt{2})$.

3.1239B Tangenta la parabola de focar $F(1,0)$ şi directoarea $x=-1$ în $M(4,y_0)$, $y_0>0$ este $x-2y+4=0$: $\frac{p}{2}=1$, $y^2=4x$, $yy_0=2(x+x_0)$, $y_0^2=16$, $y_0=4$, $x_0=4$.

3.1240B Aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ şi dreapta $9x+2y=24$ este $S=12$. Asimptotele sunt $3x=\pm 2y$ iar vârfurile triunghiului $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(4,-6)$ deci $S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&3\\4&-6\end{vmatrix}\right|=12$.

3.1241B Ecuaţia axei radicale a cercurilor $x^2+y^2-3x-4=0$, $x^2+y^2+y-2=0$ se obţine scăzând ecuaţiile: $3x+y+2=0$.

3.1242B Locul geometric al centrelor cercurilor $C_\lambda: x^2+y^2+\lambda x+(2\lambda+3)y=0$, $\alpha\in\mathbf{R}$ se obţine eliminând λ între relaţiile $x=-\frac{\lambda}{2}$, $y=-\frac{2\lambda+3}{2}$: $4x-2y=3$.

3.1243B $ax^2+(1-a)y^2=1$ este elipsa (cerc) sau hiperbolă, nu parabolă.

3.1244B Asimptotele hiperbolei $x^2-y^2=1$ sunt $y=\pm x$, deci între ele au unghiul $\frac{\pi}{2}$.

3.1245B Fie $M(1,1)$, F_1,F_2 focarele elipsei $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $d_1=|MF_1|$, $d_2=|MF_2|$ şi $s=d_1^2+d_2^2$. Atunci $s=36$: $c=\sqrt{25-9}=4$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $d_1^2=5^2+1=26$, $d_2^2=3^2+1=10$.

3.1246B Fie cercul $(x+1)^2+y^2=1$, $C(-1,0)$ centrul său, $A(x_0,y_0)\in d: y=x$, $x_0>0$, $|AC|=5$ şi $s=x_0+y_0$. Atunci $s=2$. $y_0=x_0$, $(x_0+1)^2+x_0^2=25$, $x_0=y_0=3$, $s=6$.

3.1247B Fie $C(a,b)$ centrul cercului care trece prin $(-2,0),(2,2),(0,0)$ şi $s=a+b$. Atunci $s=2$: cercul este $x^2+y^2-2ax-2by=0$, $a=-1, b=3$.

3.1248B Cercul $x^2+y^2+2mx+2ny=0$ este tangent în (1,3) dreptei $y=3$. Atunci $s=m+n=-\frac{7}{3}$: $xx_0+yy_0+m(x+x_0)+n(y+y_0)=0$, $(1+m)x+(3+n)y+m+3n\Rightarrow m=-1$, $-\frac{3n-1}{n+3}=3$, $n=-\frac{4}{3}$.

3.1249B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=9$ cu focarele $F_1(3\sqrt{2},0)$, $F_2(-3\sqrt{2},0)$, $O(0,0)$ şi $s=|OM|^2-|MF_1|\cdot|MF_2|$. Atunci $s=0$: $|MF_1|=\frac{c}{a}x_0+a$, $|MF_2|=\frac{c}{a}x_0-a$, $|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{c^2}{a^2}x_0^2-a^2$, $d=a^2-b^2=9-9=0$.

3.1250B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=a^2$, $N(x_0,0)$ şi p puterea lui N faţă de cercul $x^2+y^2=a^2$. Dacă $d=|MN|^2-p$, atunci $d=0$. Avem $p=x_0^2-a^2$, $MN^2=y_0^2$, $d=y_0^2-(x_0^2-a^2)=-(x_0^2-y_0^2)+a^2=0$.

3.1251B Fie $d: x-2=0$ şi o dreaptă variabilă prin $O(0,0)$, $d_1: y=mx$ care taie pe d în $N(2,2m)$. Perpendiculara în N pe d este $y=2m$ iar perpendiculara în O pe ON este $y=-\frac{1}{m}x$. Eliminăm m şi rezultă $y^2=-2x$.

3.1252B Fie $M=\{m\in\mathbf{R}|$ dreapta $2mx+(1-m^2)y+3(1+m^2)=0$ este tangentă cercului $x^2+y^2=9\}$. Atunci $M=\mathbf{R}$. Intersectăm cercul cu dreapta şi obţinem $(m^2+1)^2x^2+12m(m^2+1)x+36m^2=0$ cu $\Delta=0$ $\forall m\in\mathbf{R}$, deci soluţie dublă.

3.1253B Fie $y=mx+n$ perpendiculară pe $2y+x+1=0$ şi tangentă cercului $x^2+y^2=9$ iar $s=m^2+n^2$. Rezultă $m=2$, $n^2=45$ şi $s=m^2+n^2=45$.

3.1254B Cercurile $x^2+y^2-2x-2y=7$ şi $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$ sunt tangente exterior dacă distanţa între centre $C_1(1,1)$, $C_2(5,4)$ este egală cu suma razelor: $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$, $d((1,1),(5,4))=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$, $5=3+r$, $r=2$.

3.1255B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ în $N(\alpha,\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2})$ şi asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$ în $M(\alpha,\pm\frac{b}{a}\alpha)$ iar axa Ox in $P(\alpha,0)$. Rezultă $|PM|^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2$, $\overline{PN}^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2$, deci $\delta=|PM|^2-|PN|^2=b^2$.

3.1256B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ în $M\left(\alpha,\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}\right)$,

$N\left(\alpha, -\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}\right)$ iar paralele la asimptota $y=\frac{2}{3}x$ prin M, N, $y=\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}$ $+\frac{2}{3}(x-\alpha)$, $y=-\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}+\frac{2}{3}(x-\alpha)$ taie axa Oy în P şi Q. Atunci $p=|OP|\cdot|OQ|=4: y_P=y_M-\frac{2}{3}\alpha$, $y_Q=-y_M-\frac{2}{3}\alpha$, $p=|(\frac{2}{3}\alpha-y_M)(\frac{2}{3}\alpha+y_M)=\frac{4}{9}(m^2-m^2)+4=4$.

3.1257B Fie $M(x_0,y_0)\in C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ cu focarele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ şi $s=x_0^2+y_0^2$. Pantele direcţiilor $\overrightarrow{MF_1}$ şi $\overrightarrow{MF_2}$ sunt $\frac{y_0}{x_0+c}$, $\frac{y_0}{x_0-c}$, deci $\frac{y_0^2}{x_0^2-c^2}=1$, $x_0^2+y_0^2=s=21$.

3.1258B Numărul k de puncte $M(x_0,y_0)\in C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ cu focarele F_1, F_2 şi $MF_1\perp MF_2$ este $k=0$. Vezi 3.1257B, $x_0^2+y_0^2=c^2=9$ are soluţii numai dacă $c^2\geq b^2\Leftrightarrow a^2\geq 2b^2$; dar $c^2=9<b^2=16$.

3.1259B 3.1260B Vezi 3.1257 şi 3.1258B. $k=4$ respectiv $k=2$.

3.1261B Cercul $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ intersectează axa Ox în $A(-2,0)$, $B(4,0)$ iar tangentele $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ în A respectiv B ne dau $s=m_1m_2-n_1-n_2: xx_0+yy_0-(x+x_0)-8=0\Rightarrow y=-3x-6$, $y=3x-12$, deci $s=9$.

3.1262B Dreapta $d: y=mx+n$ este tangentă (variabilă) la cercul $x^2+y^2=1$ dacă ecuaţia $x^2+(mx+n)^2=1$ are rădăcină dublă deci $\Delta=m^2-n^2+1=0$ şi d taie tangentele $(T),(T')$ în $A(-1,0)$, $B(1,0)$ la cerc în $P=d\cap(T)$, $Q=d\cap(T')$. Atunci $c=|AP|\cdot|BQ|=|n-m|\cdot|n+m|=1$.

3.1263B Cercul prin $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$ este $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$ iar tangentele T_A şi T_B la cerc în A respectiv B sunt $y=x-2$, $y=x+2$. Dacă $C=T_B\cap Ox$, $D=T_A\cap Oy$ şi $d=|CD|^2$, atunci $d=(2\sqrt{2})^2=8$. Rezultă $C(-2,0)$, $D(0,2)$.

3.1264B Dreapta $y=mx-3$ este una dintre tangentele la hiperbola $x^2-y^2=a^2$ (cu focarele $(-c,0),(c,0), c=a\sqrt{2}$) în punctele de abscisă $-c,c$. Atunci $a^2=9: xx_0-yy_0=a^2$, $x_0=\pm a\sqrt{2}$, $y_0=\pm\sqrt{2a^2-a^2}=\pm a\Rightarrow m=\sqrt{2}$, $a^2=9$.

3.1265B Dreapta $y=-\frac{3}{2}$ intersectează elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ în $M\left(-2\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$ şi $N\left(2\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$, tangenta în M la elipsă este $y=\frac{-3\sqrt{3}}{4}x-6$, $m_1=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ iar $m_2=-\frac{9}{4\sqrt{3}}=m_1$, $u=\frac{m_1}{m_2}=1$ ($y=m_2x+n_2$ este dreapta BN, $B(0,3)$).

3.1266B O tangentă oarecare d la elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ cu $A'A$ axa mare şi F',F focarele) intersectează tangentele T',T la elipsă (duse în punctele A',A) în $Q=d\cap T'$, $P=d\cap T$. Atunci pantele m_{FP},m_{FQ} ne dau $u=m_{FP}\cdot m_{FQ}=-1$. $m_{FP}=\frac{y_P}{a-c}$, $m_{FQ}=-\frac{y_Q}{a+c}$, $u=\frac{y_Py_Q}{a^2-c^2}=-1$.

3.1267B Distanţele d_1 şi d_2 de la focarele F',F ale elipsei $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ la

o tangentă oarecare $\frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1$ verifică condiţia $p=d_1d_2=1$. Avem în general $d_1=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $d_2=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $p=\frac{\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=1$.

3.1268B Vezi 3.1267B. Tangentele paralele în (x_0,y_0) şi $(-x_0,-y_0)$ sunt $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$, $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=-1$ iar $d_1=d(F',T)=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $d_2=d(F,T')=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=d_2$, deci $d=d_1-d_2=0$.

3.1269B Tangenta (T) de pantă $\sqrt{3}$ la parabola $y^2=4x$ intersectează Oy în P şi directoarea parabolei în Q. Atunci $d=|PQ|=2: yy_0=2(x+x_0)$, $\frac{2}{y_0}=\sqrt{3}$, $y_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_0=\frac{1}{3}$, $(T): y=\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2p=4$, $\frac{p}{2}=1$, $x=-1$ este directoarea, $P\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $Q\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $d=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=2$.

3.1270B Fie $M(x_0,y_0)\in C: y^2=8x$, $d: y-y_0=-\frac{y_0}{4}(x-x_0)$ normala în M la C (panta tangentei $yy_0=4(x+x_0)$ este $\frac{4}{y_0}$), $N=d\cap Ox$, M_1 proiecţia lui M pe Ox şi $a=|M_1N|$. Atunci $a=4: x_N=4+x_0$ ($0-y_0=-\frac{y_0}{4}(x_N-x_0)$), $x_{M_1}=x_0$, $a=|x_N-x_{M_1}|=4$.

3.1271B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=a^2$, $d: -\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)=y-y_0$ normala în M la H (tangenta este $xx_0-yy_0=a^2$), $P=d\cap Ox$, $Q=d\cap Oy$ şi $m=\frac{|PM|}{|MQ|}$. Atunci $m=1: d: y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0$, $P(2x_0,0), Q(0,2y_0)$.

3.1272B Semidreptele d_1,d_2 prin $A(-2,0), B(2,0)$, perpendiculare pe Ox, $x=-2$, $x=2$, $y>0$ sunt intersectate de dreptele variabile prin A,B $d_1': y=m_1(x+2)$, $d_2': y=m_2(x-2)$ în $P=d_1'\cap d_2$, $Q=d_2'\cap d_1$ astfel încât $|AQ|\cdot|BP|=16$. Atunci locul geometric al punctelor $M=AP\cap BQ$ este pe cercul de diametru $AB: |AQ|=y_Q=-4m_2$, $|BP|=y_P=4m_1$ deci $m_1m_2=-1$, $\widehat{AMB}=\frac{\pi}{2}$, $x^2+y^2=4$.

3.1273B Punctul $M(x_0,y_0)$ se proiectează pe $d: x+2y=4$ în $R(x_1,y_1)$, pe Ox în $P(x_0,0)$ şi pe Oy în $Q(0,y_0)$. Dacă P,Q,R sunt coliniare, deci $\frac{x_1}{x_0}+\frac{y_1}{y_0}=1$, atunci M descrie cercul $(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2$. Avem $x_1=\frac{2(2x_0-y_0+2)}{5}$, $y_1=2-\frac{x_1}{2}$ deci $x_0^2+y_0^2-4x_0-2y_0=0$.

3.1274B Fie $d: y=m(x-2)$ o dreaptă variabil prin $A(2,0)$, $M=d\cap Oy$. Locul geometric al punctelor N care satisfac $MN\perp Oy$ şi $|MN|=|AM|$ este hiperbola $x^2-y^2=4$, $y_M=-2m$, $|AM|=2\sqrt{1+m^2}$, $x_N=\pm2\sqrt{1+m^2}$, $y_N=-2m$ deci $\frac{y_N^2}{4}=m^2$, $x_N^2=4(1+m^2)=4+y_N^2$.

3.1275B Infimumul expresiei $E=a^2+b^2$, ştiind că ecuaţia $x^2+ay^2+1-b=0$ reprezintă o elipsă este 1: evident că $a>0$ şi $1-b<0$, $1<b$ deci infimumul

expresiei $E = a^2 + b^2$ corespunde lui $a = 0$, $b = 1$ fără a fi luat.

3.1276C Locul geometric al mijloacelor coardelor unei parabole paralele cu o dreaptă dată diferită de axă este o dreaptă paralelă cu axa, $y = \frac{p}{m}$: intersecţia dreptei $y = mx + n$, m fixat cu parabola $y^2 = 2px$ ne dă $x_n = \frac{p - mn \pm \sqrt{p^2 - 2mnp}}{m^2}$, $y_n = \frac{p}{m}$, deci y_n = constant.

3.1277C Centrul (a, b) al cercului $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ care trece prin $A(4, 6), B(-2, 2), C(2, -4)$ este (3,1). Se obţine sistemul $8a + 12b = 52 + c$, $-4a + 4b = 8 + c$, $4a - 8b = 20 + c$ de unde $a = 3$, $b = 1$.

3.1278C Aria S a triunghiului ABC cu $A(4, 1)$, iar B şi C punctele de tangenţă ale tangentelor duse din A la parabola $y^2 = -2x$ este $S = 27$: tangentele sunt $y = \frac{1}{2}x - 1$ şi $y = -\frac{1}{4}x + 2$, deci $B(-2, -2)$, $C(-8, 4)$ iar $S = 27 = \frac{1}{2}\Delta$ determinantul cu liniile 411, $-2 - 2 - 1$, -841.

3.1279C Asimptotele $y = \pm 2x$ ale hiperbolei $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ taie parabola $y^2 = 4x$ în $A(1, 2)$ şi $B(1, -2)$, tangentele la parabolă în A şi B sunt $y = \pm(x + 1)$ iar $C(-1, 0)$ intersecţia lor. Aria lui ABC este 4.

3.1280C $|MF| = a - \frac{c}{a}x_0 = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0$, $MF' = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}$ şi $S = a^2 + b^2$.

3.1281C $|MF_2| = \frac{c}{a}x_0 - a$, $c^2 = 34$, $|MF_1| = \frac{c}{a}x_0 + a$, $d = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$.

3.1282C Tangenta în P la cerc are panta $m_1 = -\frac{x_1}{y_0}$ iar tangenta în Q la hiperbolă are panta $m_2 = \frac{x_2}{y_0}$. Prin urmare $x_1 \cdot x_2 = y_0^2$ deci $(a^2 - y_0^2)(a^2 + y_0^2) = y_0^4$ etc.

3.4 Funcţii şi identităţi trigonometrice

3.1283A Verificăm identitatea $\frac{(\cos a + \cos b)^2 - (\sin a + \sin b)^2}{(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2} = \cos(a + b)$: $\frac{(\cos^2 a - \sin^2 a) + (\cos^2 b - \sin^2 b) + 2(\cos a \cos b - \sin a \sin b)}{(\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) + 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)} = \frac{\cos 2a + \cos 2b + 2\cos(a + b)}{2(1 + \cos(a - b))} = \frac{2\cos(a + b)\cos(a - b) + 2\cos(a + b)}{2(1 + \cos(a - b))} = \cos(a + b)$

3.1284A Valoarea raportului $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = m$: $m = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = 1$

3.1285A Dacă $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ atunci $E = \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = 1$:

$\operatorname{tg}c = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \operatorname{ctg}(a + b) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a + b)} = \frac{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b} \Rightarrow$

$E = (\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b)\operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = (\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b)\frac{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b} + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = 1$

3.1286A $E = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} - \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20} = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.1287A $E = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x + x\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.1288A $E = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

3.1289A $E = \cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) - 4\sin x \cos x \sin y \cos y = \frac{1}{2}\cos 2(x - y) - \frac{1}{2}\cos 2(x + y) - \sin 2x \sin 2y = \sin 2x \sin 2y - \sin 2x \sin 2y = 0$

3.1290A Dacă $\operatorname{tg}a = -1, \operatorname{tg}b = -2, \operatorname{tg}c = 3$ atunci $E = \operatorname{tg}(a + b + c) = -\frac{3}{4}$:

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}(b + c)}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}(b + c)} = \frac{\operatorname{tg}a + \frac{\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c}{1 - \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}}{1 - \operatorname{tg}a\frac{\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c}{1 - \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}{1 - (\operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c)}$$

3.1291A Pentru $\operatorname{tg}x = \frac{m}{n}$ se cere $E = m\sin 2x + n\cos 2x$:

$$E = m\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + n\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = m\frac{2\frac{m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} + n\frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} = \frac{2m^2 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2} = n$$

3.1292A $\mathrm{m} = \sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2\sin\frac{105^\circ + 75^\circ}{2}\cos\frac{105^\circ - 75^\circ}{2} = 2\cos 15^\circ =$

$$= 2\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

3.1293A $x \in (\pi, 2\pi)$ şi $\cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

3.1294A Calculăm $E(x) = \frac{1}{2}(\sin(2x - 2) + \sin x + \cos x)$ pentru $x = -\frac{3\pi}{2}$;

$E\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin((-3\pi) - 2) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -1 + 1 = 0$

3.1295A $x \in (\pi, 2\pi)$ şi $\cos x = \frac{7}{25} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}$

3.1296A Determinăm Imf pentru $f(x) = \sin x + \cos x$:
$f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ deci Im$f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

3.1297A $f(x) = \cos\sqrt{x}$ este neperiodică. Dacă ar fi periodică de perioadă T s-ar verifica egalitatea $\sqrt{x+T} = \sqrt{x} + 2k\pi \Rightarrow x = \left(\frac{T - (2k\pi)^2}{4k\pi}\right)^2$ deci egalitatea are loc numai pentru anumite valori x nu pentru orice x.

3.1298A Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{12}, \sin\frac{7\pi}{12}, \mathrm{tg}\frac{11\pi}{12}$: $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, $\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}x$, $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\mathrm{tg}\frac{11\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -2+\sqrt{3}$

3.1299A Dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ şi $y \in \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ atunci $\sin y < 0 < \sin x$: intr-adevăr figurând radianii $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ pe cercul trigonometric şi obsevând că $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}, \pi < \frac{7}{2} < \frac{7\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} < \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2}$ obţinem că $\sin y < 0 < \sin x$

3.1300A $E = 4\sin 30^\circ \cos 45^\circ \mathrm{tg}60^\circ \mathrm{ctg}120^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{2}$

3.1301A $\sin\alpha = \frac{1}{3}, \mathrm{tg}\alpha = ?$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2}}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

3.1302A $E = \sin^2 x \cos^2 x \left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x(1+\cos^2 x)}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x(1+\sin^2 x)}}\right]$
$= \sin^2 x \cos^2 x \left[\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}}\right] =$
$= \sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 1$

3.1303A Punctul $F\left(\frac{44\pi}{3}\right)$, unde $F(t)$ este funcţia de acoperire $F(t) =$

$= (\cos t, \sin t)$ este: $F\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(\cos\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3.1304A Ordinea crescătoare a următoarelor numere $a = \sin 2, b = \sin\frac{2\pi}{3}, c = \sin 8$ este b, a, c deoarece pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ funcţia $\sin x$ este descrescătoare şi $8 - 2\pi \approx 1,72 < 2 < \frac{2\pi}{3} \approx 2,07$

3.1305A $s = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} + \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

3.1306A Dacă $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ care este valoarea lui $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$:
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{3}{4} = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow 3t^2 + 8t - 3 = 0, t_1 = -3, t_2 = \frac{1}{3}$.

3.1307A Cât este $\sin x$ dacă $\sin x + \cos x = 0,2$ şi $\cos x < 0$:
$\sin x - \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0,2$, $\sin^2 x - 0,2 \cdot \sin x - 0,48 = 0 \Rightarrow x = 0,8 = \frac{4}{5}$.

3.1308A Dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ cât este $\mathrm{tg}\alpha$:
$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$, deci $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

3.1309A Dacă relaţia $\sin(x+\alpha) - \sin(x-\alpha) = \sin\alpha$ are loc pentru orice $\alpha \in R$ care este valoarea lui x: $2\sin\alpha\cos x = \sin\alpha \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}, x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

3.1310A Să se determine $A = f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ şi $B = g\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ dacă $f(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$ şi $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. $f(x) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$
$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2x}, g(x) = \cos 2x$ deci $A = (2, \infty), B = (-1, 1)$

3.1311A $E = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 2\cos^2 x} = \frac{1 - \mathrm{ctg}^2 x}{1 - 2\mathrm{ctg}^2 x}$ pentru $\mathrm{ctg}x = \sqrt{3}$ obţinem $E = \frac{2}{5}$

3.1312A Dacă $\mathrm{tg}2\alpha = 2$ şi $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cât este $\mathrm{tg}\alpha$? $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \Rightarrow$
$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}\alpha - 1 = 0 \Rightarrow (\mathrm{tg}\alpha)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; deoarece $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă

3.1206A Hiperbola $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu $b = 2$ şi $(3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}) \in H$ are $a = 3$.
3.1207A Parabola $P: y^2 = 2px$, cu $(1,2) \in P$ are d(focar, directoare)$= 2$, $\frac{p}{2} = 2$.
3.1208A Fie $C_1(a_1, b_1)$ şi $C_2(a_2, b_2)$ centrele a două cercuri tangente exterior şi tangente totodată dreptelor Ox şi $x-2=0$. Atunci $p = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = 0$ în patru cazuri dar în alte patru $p \neq 0$.
3.1209A În elipsa $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ cu focarele $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ şi vârfurile $B(0,2)$, $C(0,-2)$ pătratul BF_1CF_2 are aria $S = (2\sqrt{2})^2 = 8$.
3.1210A Idem 3.1209A, $F(c,0)$, $c = 2$ un focar $A(2\sqrt{2}, 0)$, $B(0,2)$ unghiul $\widehat{BFA} = \frac{3\pi}{4}$ deoarece $OF = 2$, $OB = 2$, $\frac{OB}{OF} = \operatorname{tg}\widehat{BFO} = 1$, $\widehat{BFO} = \frac{\pi}{4}$.
3.1211A Dreapta $3x - 2y + 4 = 0$ este tangentă parabolei $y^2 = 2px$ dacă ecuaţia $y^2 = 2p\left(\frac{2y-4}{3}\right) = 0$ are rădăcini duble, $\Delta = \frac{4p^2}{9} - \frac{8p}{3} = 0$, $p = 6$.
3.1212A Fie d tangenta la parabola $y^2 = 2ox$ paralelă cu $y = 5x + 3$. $P = d \cap Oy$ şi n ordonata lui P. Atunci $n = 1$: intersectăm $y = 5x + m$ cu $y^2 = 2ox$, ecuaţia $\Delta = 25(n-2)^2 - 25n^2 = 0$ are rădăcina $n = 1$.
3.1213A Dacă $y = mx + n$ este tangentă la parabola $y^2 = 12x$ şi $u = mn$, atunci $u = 3$: ecuaţia $(mx + n)^2 = 12x$ are soluţie dublă dacă $\Delta = (mn - 6)^2 - m^2n^2 = 0$ deci $u = 3$.
3.1214A Dacă $y = x + n$ determină în parabola $y^2 - 10x = 0$ o coardă de lungime $2\sqrt{10}$ atunci $n = 2$: $\begin{cases} y = x + n \\ y^2 = 10x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 10(y - n) \Rightarrow$

$\begin{cases} x_{1,2} = 5 - n \pm \sqrt{25 - 10n} \\ y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 10n} \end{cases}$. $40 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 8(25 - 10n)$.

3.1215A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1, 2\sqrt{2})$ la cercul $x^2 + y^2 = 9$ şi $c = \frac{n}{m}$, atunci $c = -9 : xx_0 + yy_0 - 9 = 0$, $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$, $m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$, $c = -9$.
3.1216A Dacă $y = m_1x$, $y = m_2x$ sunt tangentele din $O(0,0)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$, atunci $m_1 \cdot m_2 = 1$: $y = mx$ este tangentă la cerc dacă ecuaţia $(1 + m^2)x^2 - 6(m + 1)x + 14$, are $\Delta = -5m^2 + 18m - 5 = 0$, deci $m_1m_2 = 1$.
3.1217A Tangenta $ax + by + c = 0$ la elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ în $M(6,4)$ ne dă $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8} : \frac{xx_0}{100} + \frac{yy_0}{25} - 1 = 0$, $\frac{6}{100}x + \frac{4}{25}y - 1 = 0$, $a = \frac{3}{50}$, $b = \frac{4}{25}$, $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8}$.
3.1218A Dacă $y = x + 3$ este tangentă elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 5$: ecuaţia $\frac{x^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$ are rădăcină dublă dacă $\Delta = \frac{9}{b^4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{9}{b^2} - 1\right) = 0$, $b^2 = 5$.
3.1219A Dacă $ax + by + c = 0$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ în (6,5)

atunci $s = \frac{a}{b} = -\frac{3}{2} : \frac{xx_0}{16} - \frac{yy_0}{20} = 1$, $\frac{3x}{8} - \frac{y}{4} = 1$, $s = \frac{3}{-2}$.
3.1120A Dacă $y = \frac{5}{4}x - 4$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 9$, vezi 3.1218A.
3.1221A Tangentele sunt $d: \frac{xx_0}{25} + \frac{yy_0}{16} = 1$, $x = -5$ (în A'), $x = 5$ (în A) deci $A'Q = y_Q = \frac{16}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{5}\right)$, $AP = y_P = \frac{16}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{5}\right)$, $A'Q \cdot AP = \frac{16^2}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{25}\right) = 16$, deoarece $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
3.1222A Pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punctele $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ în care tangentele sunt paralele, sunt simetrice faţă de $O(0,0)$, deci $s = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$.
3.1223A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în (1,2) la parabola $y^2 = 4x$ atunci $s = m + n = 2 : yy_0 = 2(x + x_0)$, $2y = 2(x + 1)$, $m = n = 1$, $s = 2$.
3.1224B Cercul $C: x^2 + y^2 - 6x = 0$ şi elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ se intersectează în 2 puncte .
3.1225C Pentru familia de elipse (E_{y_0}) : $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - y_0)^2}{4} = 1$ avem $D = \bigcup_{y_0 \in [-1,1]} E_{y_0} \subset [-4,4] \times [-3,3]$: rezultă $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y_0 \leq 1 \Rightarrow$
$-1 - 2 \leq y \leq 1 + 2$.
3.1226B Dintre cercurile $C_1: (x-2)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$, $C_2: (x-4)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$, $C_3: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ sunt tangente la $d: y = x$, C_1, C_2: distanţele de la centre la d sunt $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
3.1227B Curba dată de $x = 2 + \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $t \in [0, \pi]$ este semicerc: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y \geq 1$.
3.1228B Mijloacele coardelor unei elipse, paralele cu o dreaptă fixată descriu un segment prin $O(0,0)$: considerăm elipsa raportată la axe, $x_0 = a\cos t$, $y_0 = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, m o pantă fixată; dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$, $y - b\sin t = m(x - a\cos t)$, intersectează elipsa în $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_1, x_2 soluţii ale ecuaţiei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - ma\cos t + b\sin t)^2}{b^2} = 1$ unde $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0)$, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{ma^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$, $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{m^2a^2 - b^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$. Deci $X = \frac{x_1+x_2}{2}$, $Y = \frac{y_1+y_2}{2}$ verifică $\frac{Y}{X} = \frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2}$.
3.1229B Aria patrulaterului determinat de tangentele la hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ în punctele $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$, $C(-\sqrt{2}, -1)$, $D(\sqrt{2}, -1)$ este $S = \sqrt{2}$: din simetrie rezultă că patrulaterul este un dreptunghi dat de intersecţia dreptelor $(xx_0 - yy_0 = 1)$: $y = \pm\sqrt{2}x - 1$, $y = \mp\sqrt{2}x + 1$ deci vârfurile sunt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dar $S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$.
3.1230B Cercul cu centrul $A(1,-3)$ şi tangent dreptei $d: y = 2$ are raza $5: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, $d(A,d) = 5$.

3.1206A Hiperbola $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu $b = 2$ şi $(3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}) \in H$ are $a = 3$.
3.1207A Parabola $P: y^2 = 2px$, cu $(1,2) \in P$ are d(focar, directoare)$= 2$, $\frac{p}{2} = 2$.
3.1208A Fie $C_1(a_1, b_1)$ şi $C_2(a_2, b_2)$ centrele a două cercuri tangente exterior şi tangente totodată dreptelor Ox şi $x-2=0$. Atunci $p = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = 0$ în patru cazuri dar în alte patru $p \neq 0$.
3.1209A În elipsa $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ cu focarele $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ şi vârfurile $B(0,2)$, $C(0,-2)$ pătratul BF_1CF_2 are aria $S = (2\sqrt{2})^2 = 8$.
3.1210A Idem 3.1209A, $F(c,0)$, $c = 2$ un focar $A(2\sqrt{2}, 0)$, $B(0,2)$ unghiul $\widehat{BFA} = \frac{3\pi}{4}$ deoarece $OF = 2$, $OB = 2$, $\frac{OB}{OF} = \operatorname{tg}\widehat{BFO} = 1$, $\widehat{BFO} = \frac{\pi}{4}$.
3.1211A Dreapta $3x - 2y + 4 = 0$ este tangentă parabolei $y^2 = 2px$ dacă ecuaţia $y^2 = 2p\left(\frac{2y-4}{3}\right) = 0$ are rădăcini duble, $\Delta = \frac{4p^2}{9} - \frac{8p}{3} = 0$, $p = 6$.
3.1212A Fie d tangenta la parabola $y^2 = 2ox$ paralelă cu $y = 5x + 3$. $P = d \cap Oy$ şi n ordonata lui P. Atunci $n = 1$: intersectăm $y = 5x + m$ cu $y^2 = 2ox$, ecuaţia $\Delta = 25(n-2)^2 - 25n^2 = 0$ are rădăcina $n = 1$.
3.1213A Dacă $y = mx + n$ este tangentă la parabola $y^2 = 12x$ şi $u = mn$, atunci $u = 3$: ecuaţia $(mx + n)^2 = 12x$ are soluţie dublă dacă $\Delta = (mn - 6)^2 - m^2n^2 = 0$ deci $u = 3$.
3.1214A Dacă $y = x + n$ determină în parabola $y^2 - 10x = 0$ o coardă de lungime $2\sqrt{10}$ atunci $n = 2$: $\begin{cases} y = x + n \\ y^2 = 10x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 10(y - n) \Rightarrow$

$\begin{cases} x_{1,2} = 5 - n \pm \sqrt{25 - 10n} \\ y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 10n} \end{cases}$. $40 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 8(25 - 10n)$.

3.1215A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1, 2\sqrt{2})$ la cercul $x^2 + y^2 = 9$ şi $c = \frac{n}{m}$, atunci $c = -9$: $xx_0 + yy_0 - 9 = 0$, $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$, $m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$, $c = -9$.
3.1216A Dacă $y = m_1x$, $y = m_2x$ sunt tangentele din $O(0,0)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$, atunci $m_1 \cdot m_2 = 1$: $y = mx$ este tangentă la cerc dacă ecuaţia $(1 + m^2)x^2 - 6(m + 1)x + 14$, are $\Delta = -5m^2 + 18m - 5 = 0$, deci $m_1m_2 = 1$.
3.1217A Tangenta $ax + by + c = 0$ la elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ în $M(6,4)$ ne dă $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8}$: $\frac{xx_0}{100} + \frac{yy_0}{25} - 1 = 0$, $\frac{6}{100}x + \frac{4}{25}y - 1 = 0$, $a = \frac{3}{50}$, $b = \frac{4}{25}$, $s = \frac{a}{b} = \frac{3}{8}$.
3.1218A Dacă $y = x + 3$ este tangentă elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 5$: ecuaţia $\frac{x^2}{4} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$ are rădăcină dublă dacă $\Delta = \frac{9}{b^4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{9}{b^2} - 1\right) = 0$, $b^2 = 5$.
3.1219A Dacă $ax + by + c = 0$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ în $(6,5)$ atunci $s = \frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$: $\frac{xx_0}{16} - \frac{yy_0}{20} = 1$, $\frac{3x}{8} - \frac{y}{4} = 1$, $s = \frac{3}{-2}$.

3.1220A Dacă $y = \frac{5}{4}x - 4$ este tangentă hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, atunci $b^2 = 9$, vezi 3.1218A.
3.1221A Tangentele sunt $d: \frac{xx_0}{25} + \frac{yy_0}{16} = 1$, $x = -5$ (în A'), $x = 5$ (în A) deci $A'Q = y_Q = \frac{16}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{5}\right)$, $AP = y_P = \frac{16}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{5}\right)$, $A'Q \cdot AP = \frac{16^2}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{25}\right) = 16$, deoarece $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
3.1222A Pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punctele $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ în care tangentele sunt paralele, sunt simetrice faţă de $O(0,0)$, deci $s = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0$.
3.1223A Dacă $y = mx + n$ este tangentă în $(1,2)$ la parabola $y^2 = 4x$ atunci $s = m + n = 2$: $yy_0 = 2(x + x_0)$, $2y = 2(x + 1)$, $m = n = 1$, $s = 2$.
3.1224B Cercul $C: x^2 + y^2 - 6x = 0$ şi elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ se intersectează în 2 puncte .
3.1225C Pentru familia de elipse (E_{y_0}) : $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - y_0)^2}{4} = 1$ avem $D = \bigcup_{y_0 \in [-1,1]} E_{y_0} \subset [-4,4] \times [-3,3]$: rezultă $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y_0 \leq 1 \Rightarrow -1 - 2 \leq y \leq 1 + 2$.
3.1226B Dintre cercurile $C_1: (x-2)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$, $C_2: (x-4)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$, $C_3: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ sunt tangente la $d: y = x$, C_1, C_2: distanţele de la centre la d sunt $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
3.1227B Curba dată de $x = 2 + \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $t \in [0, \pi]$ este semicerc: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y \geq 1$.
3.1228B Mijloacele coardelor unei elipse, paralele cu o dreaptă fixată descriu un segment prin $O(0,0)$: considerăm elipsa raportată la axe, $x_0 = a\cos t$, $y_0 = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, m o pantă fixată; dreapta $y - y_0 = m(x - x_0)$, $y - b\sin t = m(x - a\cos t)$, intersectează elipsa în $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, x_1, x_2 soluţii ale ecuaţiei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - ma\cos t + b\sin t)^2}{b^2} = 1$ unde $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0)$, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{ma^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$, $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{m^2a^2 - b^2}{b^2}(ma\cos t - b\sin t)$. Deci $X = \frac{x_1+x_2}{2}$, $Y = \frac{y_1+y_2}{2}$ verifică $\frac{Y}{X} = \frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2}$.
3.1229B Aria patrulaterului determinat de tangentele la hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ în punctele $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$, $C(-\sqrt{2}, -1)$, $D(\sqrt{2}, -1)$ este $S = \sqrt{2}$: din simetrie rezultă că patrulaterul este un dreptunghi dat de intersecţia dreptelor $(xx_0 - yy_0 = 1)$: $y = \pm\sqrt{2}x - 1$, $y = \mp\sqrt{2}x + 1$ deci vârfurile sunt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dar $S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$.
3.1230B Cercul cu centrul $A(1,-3)$ şi tangent dreptei $d: y = 2$ are raza 5 : $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, $d(A,d) = 5$.

3.1231B Valoarea lui a astfel ca $d: 2x+y=0$ să fie tangentă cercului $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ este ??

3.1232B Focarele elipsei raportată la axe care trece prin $A(2,0)$, $B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt $F'(-\sqrt{3},0)$, $F(\sqrt{3},0)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{4}{a^2}=1\Rightarrow a=2$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

3.1233B Punctul $A(\alpha,\beta)\in C: x^2-y^2=1$ astfel ca VA, $V(1,0)$, să fie paralelă cu $d: y-x\sqrt{3}=-1$ este $A(2,\sqrt{3})$: $A=C\cap d_1$, $d_1: y=\sqrt{3}(x-1)$, $x^2-3x+2=0$.

3.1234B Punctul $M(x,y)\in C: y^2=16x$, $y>0$ astfel ca $d(M,\text{focar})=8$ este $M(4,8)$: $16=2p\Rightarrow p=8$, $\frac{p}{2}=4$, $d((x,y),(4,0))=\sqrt{(x-4)+y^2}=8$, $x^3+8x-48=0$, $x=4$, $y=8$.

3.1235B Fie $F(-2,0)$, $F(2,0)$. Locul geometric al punctelor M astfel încât $d(M,F')+d(M,F)=6$ este elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$: semiaxa mare $a=2+x$, unde $x+x+4=6$ deci $x=1$, $a=3$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

3.1236B Distanţa de la $A(10,2)$ la tangenta în $B(3,5)$ la elipsa $25x^2+9y^2=450$ este $d=\frac{13\sqrt{34}}{17}\cdot 25xx_0+9yy_0=450$, $5x+3y-30=0$, $d=\frac{|50+6-30|}{\sqrt{25+9}}$.

3.1237B Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cu un focar $F(\sqrt{13},0)$ şi o asimptotă $3x-2y=0$ are $a=2, b=3$: $c^2=a^2+b^2=13$, $bx-ay=0\Rightarrow a^2=4$, $b=3$.

3.1238B Aria patrulaterului format din tangentele duse din $A(-1,0)$ la parabola $y^2=2x$ şi normalele duse în punctele de tangenţă este $S=3\sqrt{2}$. Intersectăm $y=m(x+1)$ cu $y^2=2x$, $m^2+2(m^2-1)x+m^2=0$, rădăcină dublă înseamnă $\Delta=-2m^2+1=0$ deci $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se obţine patrulaterul $ABCD$, $A(-1,0)$, $B(1,\sqrt{2})$, $C(2,0)$, $D(1,-\sqrt{2})$.

3.1239B Tangenta la parabola de focar $F(1,0)$ şi directoarea $x=-1$ în $M(4,y_0)$, $y_0>0$ este $x-2y+4=0$: $\frac{p}{2}=1$, $y^2=4x$, $yy_0=2(x+x_0)$, $y_0^2=16$, $y_0=4$, $x_0=4$.

3.1240B Aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ şi dreapta $9x+2y=24$ este $S=12$. Asimptotele sunt $3x=\pm 2y$ iar vârfurile triunghiului $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(4,-6)$ deci $S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&3\\4&-6\end{vmatrix}\right|=12$.

3.1241B Ecuaţia axei radicale a cercurilor $x^2+y^2-3x-4=0$, $x^2+y^2+y-2=0$ se obţine scăzând ecuaţiile: $3x+y+2=0$.

3.1242B Locul geometric al centrelor cercurilor $C_\lambda: x^2+y^2+\lambda x+(2\lambda+3)y=0$, $\alpha\in\mathbf{R}$ se obţine eliminând λ între relaţiile $x=-\frac{\lambda}{2}$, $y=-\frac{2\lambda+3}{2}$: $4x-2y=3$.

3.1243B $ax^2+(1-a)y^2=1$ este elipsa (cerc) sau hiperbolă, nu parabolă.

3.1244B Asimptotele hiperbolei $x^2-y^2=1$ sunt $y=\pm x$, deci între ele au unghiul $\frac{\pi}{2}$.

3.1245B Fie $M(1,1)$, F_1,F_2 focarele elipsei $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $d_1=|MF_1|$, $d_2=|MF_2|$ şi $s=d_1^2+d_2^2$. Atunci $s=36$: $c=\sqrt{25-9}=4$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $d_1^2=5^2+1=26$, $d_2^2=3^2+1=10$.

3.1246B Fie cercul $(x+1)^2+y^2=1$, $C(-1,0)$ centrul său, $A(x_0,y_0)\in d: y=x$, $x_0>0$, $|AC|=5$ şi $s=x_0+y_0$. Atunci $s=2$. $y_0=x_0$, $(x_0+1)^2+x_0^2=25$, $x_0=y_0=3$, $s=6$.

3.1247B Fie $C(a,b)$ centrul cercului care trece prin $(-2,0),(2,2),(0,0)$ şi $s=a+b$. Atunci $s=2$: cercul este $x^2+y^2-2ax-2by=0$, $a=-1, b=3$.

3.1248B Cercul $x^2+y^2+2mx+2ny=0$ este tangent în $(1,3)$ dreptei $y=3$. Atunci $s=m+n=-\frac{7}{3}$: $xx_0+yy_0+m(x+x_0)+n(y+y_0)=0$, $(1+m)x+(3+n)y+m+3n\Rightarrow m=-1$, $-\frac{3n-1}{n+3}=3$, $n=-\frac{4}{3}$.

3.1249B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=9$ cu focarele $F_1(3\sqrt{2},0)$, $F_2(-3\sqrt{2},0)$, $O(0,0)$ şi $s=|OM|^2-|MF_1|\cdot|MF_2|$. Atunci $s=0$: $|MF_1|=\frac{c}{a}x_0+a$, $|MF_2|=\frac{c}{a}x_0-a$, $|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{c^2}{a^2}x_0^2-a^2$, $d=a^2-b^2=9-9=0$.

3.1250B Fie $M(x_0,y_0)\in H: x^2-y^2=a^2$, $N(x_0,0)$ şi p puterea lui N faţă de cercul $x^2+y^2=a^2$. Dacă $d=|MN|^2-p$, atunci $d=0$. Avem $p=x_0^2-a^2$, $MN^2=y_0^2$, $d=y_0^2-(x_0^2-a^2)=-(x_0^2-y_0^2)+a^2=0$.

3.1251B Fie $d: x-2=0$ şi o dreaptă variabilă prin $O(0,0)$, $d_1: y=mx$ care taie pe d în $N(2,2m)$. Perpendiculara în N pe d este $y=2m$ iar perpendiculara în O pe ON este $y=-\frac{1}{m}x$. Eliminăm m şi rezultă $y^2=-2x$.

3.1252B Fie $M=\{m\in\mathbf{R}|$ dreapta $2mx+(1-m^2)y+3(1+m^2)=0$ este tangentă cercului $x^2+y^2=9\}$. Atunci $M=\mathbf{R}$. Intersectăm cercul cu dreapta şi obţinem $(m^2+1)^2x^2+12m(m^2+1)x+36m^2=0$ cu $\Delta=0$ $\forall m\in\mathbf{R}$, deci soluţie dublă.

3.1253B Fie $y=mx+n$ perpendiculară pe $2y+x+1=0$ şi tangentă cercului $x^2+y^2=9$ iar $s=m^2+n^2$. Rezultă $m=2$, $n^2=45$ şi $s=m^2+n^2=45$.

3.1254B Cercurile $x^2+y^2-2x-2y=7$ şi $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$ sunt tangente exterior dacă distanţa între centre $C_1(1,1)$, $C_2(5,4)$ este egală cu suma razelor: $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$, $d((1,1),(5,4))=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$, $5=3+r$, $r=2$.

3.1255B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ în $N(\alpha,\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2})$ şi asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$ în $M(\alpha,\pm\frac{b}{a}\alpha)$ iar axa Ox în $P(\alpha,0)$. Rezultă $|PM|^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2$, $\overline{PN}^2=\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2$, deci $\delta=|PM|^2-|PN|^2=b^2$.

3.1256B Dreapta $x=\alpha$ taie hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ în $M\left(\alpha,\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}\right)$,

$N\left(\alpha, -\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}\right)$ iar paralele la asimptota $y=\frac{2}{3}x$ prin M, N, $y=\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}+\frac{2}{3}(x-\alpha)$, $y=-\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2-4}+\frac{2}{3}(x-\alpha)$ taie axa Oy în P şi Q. Atunci $p=|OP|\cdot|OQ|=4$: $y_P=y_M-\frac{2}{3}\alpha$, $y_Q=-y_M-\frac{2}{3}\alpha$, $p=|(\frac{2}{3}\alpha-y_M)(\frac{2}{3}\alpha+y_M)=\frac{4}{9}(m^2-m^2)+4=4$.

3.1257B Fie $M(x_0,y_0)\in C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ cu focarele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ şi $s=x_0^2+y_0^2$. Pantele direcţiilor $\overrightarrow{MF_1}$ şi $\overrightarrow{MF_2}$ sunt $\frac{y_0}{x_0+c}$, $\frac{y_0}{x_0-c}$, deci $\frac{y_0^2}{x_0^2-c^2}=1$, $x_0^2+y_0^2=s=21$.

3.1258B Numărul k de puncte $M(x_0,y_0)\in C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ cu focarele F_1, F_2 şi $MF_1\perp MF_2$ este $k=0$. Vezi 3.1257B, $x_0^2+y_0^2=c^2=9$ are soluţii numai dacă $c^2\geq b^2\Leftrightarrow a^2\geq 2b^2$; dar $c^2=9<b^2=16$.

3.1259B 3.1260B Vezi 3.1257 şi 3.1258B. $k=4$ respectiv $k=2$.

3.1261B Cercul $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ intersectează axa Ox în $A(-2,0)$, $B(4,0)$ iar tangentele $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ în A respectiv B ne dau $s=m_1m_2-n_1-n_2$: $xx_0+yy_0-(x+x_0)-8=0\Rightarrow y=-3x-6$, $y=3x-12$, deci $s=9$.

3.1262B Dreapta $d:y=mx+n$ este tangentă (variabilă) la cercul $x^2+y^2=1$ dacă ecuaţia $x^2+(mx+n)^2=1$ are rădăcină dublă deci $\Delta=m^2-n^2+1=0$ şi d taie tangentele $(T),(T')$ în $A(-1,0)$, $B(1,0)$ la cerc în $P=d\cap(T)$, $Q=d\cap(T')$. Atunci $c=|AP|\cdot|BQ|=|n-m|\cdot|n+m|=1$.

3.1263B Cercul prin $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$ este $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$ iar tangentele T_A şi T_B la cerc în A respectiv B sunt $y=x-2$, $y=x+2$. Dacă $C=T_B\cap Ox$, $D=T_A\cap Oy$ şi $d=|CD|^2$, atunci $d=(2\sqrt{2})^2=8$. Rezultă $C(-2,0)$, $D(0,2)$.

3.1264B Dreapta $y=mx-3$ este una dintre tangentele la hiperbola $x^2-y^2=a^2$ (cu focarele $(-c,0),(c,0),c=a\sqrt{2}$) în punctele de abscisă $-c,c$. Atunci $a^2=9$: $xx_0-yy_0=a^2$, $x_0=\pm a\sqrt{2}$, $y_0=\pm\sqrt{2a^2-a^2}=\pm a\Rightarrow m=\sqrt{2}$, $a^2=9$.

3.1265B Dreapta $y=-\frac{3}{2}$ intersectează elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ în $M\left(-2\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$ şi $N\left(2\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$, tangenta în M la elipsă este $y=\frac{-3\sqrt{3}}{4}x-6$, $m_1=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ iar $m_2=-\frac{9}{4\sqrt{3}}=m_1$, $u=\frac{m_1}{m_2}=1$ ($y=m_2x+n_2$ este dreapta BN, $B(0,3)$).

3.1266B O tangentă oarecare d la elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ cu $A'A$ axa mare şi F',F focarele) intersectează tangentele T',T la elipsă (duse în punctele A',A) în $Q=d\cap T'$, $P=d\cap T$. Atunci pantele m_{FP},m_{FQ} ne dau $u=m_{FP}\cdot m_{FQ}=-1$. $m_{FP}=\frac{y_P}{a-c}$, $m_{FQ}=-\frac{y_Q}{a+c}$, $u=\frac{y_Py_Q}{a^2-c^2}=-1$.

3.1267B Distanţele d_1 şi d_2 de la focarele F',F ale elipsei $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ la

o tangentă oarecare $\frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1$ verifică condiţia $p=d_1d_2=1$. Avem în general $d_1=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $d_2=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $p=\frac{\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=1$.

3.1268B Vezi 3.1267B. Tangentele paralele în (x_0,y_0) şi $(-x_0,-y_0)$ sunt $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$, $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=-1$ iar $d_1=d(F',T)=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$, $d_2=d(F,T')=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=d_2$, deci $d=d_1-d_2=0$.

3.1269B Tangenta (T) de pantă $\sqrt{3}$ la parabola $y^2=4x$ intersectează Oy în P şi directoarea parabolei în Q. Atunci $d=|PQ|=2$: $yy_0=2(x+x_0)$, $\frac{2}{y_0}=\sqrt{3}$, $y_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_0=\frac{1}{3}$, $(T):y=\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2p=4$, $\frac{p}{2}=1$, $x=-1$ este directoarea, $P\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $Q\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $d=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=2$.

3.1270B Fie $M(x_0,y_0)\in C:y^2=8x$, $d:y-y_0=-\frac{y_0}{4}(x-x_0)$ normala în M la C (panta tangentei $yy_0=4(x+x_0)$ este $\frac{4}{y_0}$), $N=d\cap Ox$, M_1 proiecţia lui M pe Ox şi $a=|M_1N|$. Atunci $a=4$: $x_N=4+x_0$ ($0-y_0=-\frac{y_0}{4}(x_N-x_0)$), $x_{M_1}=x_0$, $a=|x_N-x_{M_1}|=4$.

3.1271B Fie $M(x_0,y_0)\in H:x^2-y^2=a^2$, $d:-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)=y-y_0$ normala în M la H (tangenta este $xx_0-yy_0=a^2$), $P=d\cap Ox$, $Q=d\cap Oy$ şi $m=\frac{|PM|}{|MQ|}$. Atunci $m=1$: $d:y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0$, $P(2x_0,0),Q(0,2y_0)$.

3.1272B Semidreptele d_1,d_2 prin $A(-2,0),B(2,0)$, perpendiculare pe Ox, $x=-2$, $x=2$, $y>0$ sunt intersectate de dreptele variabile prin A,B $d_1':y=m_1(x+2)$, $d_2':y=m_2(x-2)$ în $P=d_1'\cap d_2$, $Q=d_2'\cap d_1$ astfel încât $|AQ|\cdot|BP|=16$. Atunci locul geometric al punctelor $M=AP\cap BQ$ este pe cercul de diametru AB : $|AQ|=y_Q=-4m_2$, $|BP|=y_P=4m_1$ deci $m_1m_2=-1$, $\widehat{AMB}=\frac{\pi}{2}$, $x^2+y^2=4$.

3.1273B Punctul $M(x_0,y_0)$ se proiectează pe $d:x+2y=4$ în $R(x_1,y_1)$, pe Ox în $P(x_0,0)$ şi pe Oy în $Q(0,y_0)$. Dacă P,Q,R sunt coliniare, deci $\frac{x_1}{x_0}+\frac{y_1}{y_0}=1$, atunci M descrie cercul $(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2$. Avem $x_1=\frac{2(2x_0-y_0+2)}{5}$, $y_1=2-\frac{x_1}{2}$ deci $x_0^2+y_0^2-4x_0-2y_0=0$.

3.1274B Fie $d:y=m(x-2)$ o dreaptă variabil prin $A(2,0)$, $M=d\cap Oy$. Locul geometric al punctelor N care satisfac $MN\perp Oy$ şi $|MN|=|AM|$ este hiperbola $x^2-y^2=4$, $y_M=-2m$, $|AM|=2\sqrt{1+m^2}$, $x_N=\pm2\sqrt{1+m^2}$, $y_N=-2m$ deci $\frac{y_N^2}{4}=m^2$, $x_N^2=4(1+m^2)=4+y_N^2$.

3.1275B Infimumul expresiei $E=a^2+b^2$, ştiind că ecuaţia $x^2+ay^2+1-b=0$ reprezintă o elipsă este 1: evident că $a>0$ şi $1-b<0$, $1<b$ deci infimumul

expresiei $E = a^2 + b^2$ corespunde lui $a = 0$, $b = 1$ fără a fi luat.

3.1276C Locul geometric al mijloacelor coardelor unei parabole paralele cu o dreaptă dată diferită de axă este o dreaptă paralelă cu axa, $y = \frac{p}{m}$: intersecţia dreptei $y = mx + n$, m fixat cu parabola $y^2 = 2px$ ne dă $x_n = \frac{p - mn \pm \sqrt{p^2 - 2mnp}}{m^2}$, $y_n = \frac{p}{m}$, deci y_n = constant.

3.1277C Centrul (a, b) al cercului $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ care trece prin $A(4, 6), B(-2, 2), C(2, -4)$ este (3,1). Se obţine sistemul $8a + 12b = 52 + c$, $-4a + 4b = 8 + c$, $4a - 8b = 20 + c$ de unde $a = 3$, $b = 1$.

3.1278C Aria S a triunghiului ABC cu $A(4, 1)$, iar B şi C punctele de tangenţă ale tangentelor duse din A la parabola $y^2 = -2x$ este $S = 27$: tangentele sunt $y = \frac{1}{2}x - 1$ şi $y = -\frac{1}{4}x + 2$, deci $B(-2, -2)$, $C(-8, 4)$ iar $S = 27 = \frac{1}{2}\Delta$ determinantul cu liniile 411, $-2 - 2 - 1$, -841.

3.1279C Asimptotele $y = \pm 2x$ ale hiperbolei $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ taie parabola $y^2 = 4x$ în $A(1, 2)$ şi $B(1, -2)$, tangentele la parabolă în A şi B sunt $y = \pm(x + 1)$ iar $C(-1, 0)$ intersecţia lor. Aria lui ABC este 4.

3.1280C $|MF| = a - \frac{c}{a}x_0 = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0$, $MF' = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}$ şi $S = a^2 + b^2$.

3.1281C $|MF_2| = \frac{c}{a}x_0 - a$, $c^2 = 34$, $|MF_1| = \frac{c}{a}x_0 + a$, $d = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$.

3.1282C Tangenta în P la cerc are panta $m_1 = -\frac{x_1}{y_0}$ iar tangenta în Q la hiperbolă are panta $m_2 = \frac{x_2}{y_0}$. Prin urmare $x_1 \cdot x_2 = y_0^2$ deci $(a^2 - y_0^2)(a^2 + y_0^2) = y_0^4$ etc.

3.4 Funcţii şi identităţi trigonometrice

3.1283A Verificăm identitatea $\frac{(\cos a + \cos b)^2 - (\sin a + \sin b)^2}{(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2} = \cos(a + b)$: $\frac{(\cos^2 a - \sin^2 a) + (\cos^2 b - \sin^2 b) + 2(\cos a \cos b - \sin a \sin b)}{(\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) + 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)} = \frac{\cos 2a + \cos 2b + 2\cos(a + b)}{2(1 + \cos(a - b))} = \frac{2\cos(a + b)\cos(a - b) + 2\cos(a + b)}{2(1 + \cos(a - b))} = \cos(a + b)$

3.1284A Valoarea raportului $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = m$:

$m = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x} = 1$

3.1285A Dacă $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ atunci $E = \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = 1$:

$\operatorname{tg}c = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \operatorname{ctg}(a + b) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a + b)} = \frac{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b} \Rightarrow$

$E = (\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b)\operatorname{tg}c + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = (\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b)\frac{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b} + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = 1$

3.1286A $E = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} - \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20} = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.1287A $E = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x + x\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.1288A $E = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

3.1289A $E = \cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) - 4\sin x \cos x \sin y \cos y = \frac{1}{2}\cos 2(x - y) - \frac{1}{2}\cos 2(x + y) - \sin 2x \sin 2y = \sin 2x \sin 2y - \sin 2x \sin 2y = 0$

3.1290A Dacă $\operatorname{tg}a = -1, \operatorname{tg}b = -2, \operatorname{tg}c = 3$ atunci $E = \operatorname{tg}(a + b + c) = -\frac{3}{4}$:

$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}(b + c)}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}(b + c)} = \frac{\operatorname{tg}a + \frac{\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c}{1 - \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}}{1 - \operatorname{tg}a\frac{\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c}{1 - \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}} = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c}{1 - (\operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}b \cdot \operatorname{tg}c)}$

3.1291A Pentru $\operatorname{tg}x = \frac{m}{n}$ se cere $E = m\sin 2x + n\cos 2x$:

$E = m\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + n\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = m\frac{2\frac{m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} + n\frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} = \frac{2m^2 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2} = n$

3.1292A $m = \sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2\sin\frac{105^\circ + 75^\circ}{2}\cos\frac{105^\circ - 75^\circ}{2} = 2\cos 15^\circ = 2\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

3.1293A $x \in (\pi, 2\pi)$ şi $\cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

3.1294A Calculăm $E(x) = \frac{1}{2}(\sin(2x - 2) + \sin x + \cos x)$ pentru $x = -\frac{3\pi}{2}$;

$E\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin((-3\pi) - 2) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$

3.1295A $x \in (\pi, 2\pi)$ şi $\cos x = \frac{7}{25} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}$

3.1296A Determinăm Imf pentru $f(x)=\sin x+\cos x$:
$f(x)=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ deci Im$f=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

3.1297A $f(x)=\cos\sqrt{x}$ este neperiodică. Dacă ar fi periodică de perioadă T s-ar verifica egalitatea $\sqrt{x+T}=\sqrt{x}+2k\pi\Rightarrow x=\left(\frac{T-(2k\pi)^2}{4k\pi}\right)^2$ deci egalitatea are loc numai pentru anumite valori x nu pentru orice x.

3.1298A Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{7\pi}{12},\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}$: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x$, $\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=-2+\sqrt{3}$

3.1299A Dacă $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ şi $y\in\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$ atunci $\sin y<0<\sin x$: într-adevăr figurând radianii $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}$ pe cercul trigonometric şi obsevând că $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2},\pi<\frac{7}{2}<\frac{7\pi}{6},\frac{2\pi}{3}<\frac{9}{2}<\frac{3\pi}{2}$ obţinem că $\sin y<0<\sin x$

3.1300A $E=4\sin30^o\cos45^o\operatorname{tg}60^o\operatorname{ctg}120^o=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\sqrt{2}$

3.1301A $\sin\alpha=\frac{1}{3},\operatorname{tg}\alpha=?$: $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2}},\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

3.1302A $E=\sin^2x\cos^2x\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2x(1+\cos^2x)}}+\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2x(1+\sin^2x)}}\right]$
$=\sin^2x\cos^2x\left[\frac{1}{\sqrt{\cos^2x-\sin^2x\cos^2x}}+\frac{1}{\sqrt{\sin^2x-\sin^2x\cos^2x}}\right]=$
$=\sin^2x\cos^2x\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)=1$

3.1303A Punctul $F\left(\frac{44\pi}{3}\right)$, unde $F(t)$ este funcţia de acoperire $F(t)=$

$=(\cos t,\sin t)$ este: $F\left(14\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\cos\left(14\pi+\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(14\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3.1304A Ordinea crescătoare a următoarelor numere $a=\sin2,b=\sin\frac{2\pi}{3},c=\sin8$ este b,a,c deoarece pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ funcţia $\sin x$ este descrescătoare şi $8-2\pi\approx1,72<2<\frac{2\pi}{3}\approx2,07$

3.1305A $s=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

3.1306A Dacă $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ care este valoarea lui $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \frac{3}{4}=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow3t^2+8t-3=0,t_1=-3,t_2=\frac{1}{3}$.

3.1307A Cât este $\sin x$ dacă $\sin x+\cos x=0,2$ şi $\cos x<0$:
$\sin x-\sqrt{1-\sin^2x}=0,2,\ \sin^2x-0,2\cdot\sin x-0,48=0\Rightarrow x=0,8=\frac{4}{5}$.

3.1308A Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ cât este $\operatorname{tg}\alpha$:
$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$, deci $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$

3.1309A Dacă relaţia $\sin(x+\alpha)-\sin(x-\alpha)=\sin\alpha$ are loc pentru orice $\alpha\in R$ care este valoarea lui x: $2\sin\alpha\cos x=\sin\alpha\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2},x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

3.1310A Să se determine $A=f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ şi $B=g\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ dacă $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ şi $g(x)=\cos^2x-\sin^2x$. $f(x)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$
$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin2x},g(x)=\cos2x$ deci $A=(2,\infty),B=(-1,1)$

3.1311A $E=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x-2\cos^2x}=\frac{1-\operatorname{ctg}^2x}{1-2\operatorname{ctg}^2x}$ pentru $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$ obţinem $E=\frac{2}{5}$

3.1312A Dacă $\operatorname{tg}2\alpha=2$ şi $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, cât este $\operatorname{tg}\alpha$? $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\Rightarrow$ $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha-1=0\Rightarrow(\operatorname{tg}\alpha)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; deoarece $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

3.1313A Dacă $\sin x = \dfrac{8}{17}$ şi $\cos y = \dfrac{3}{5}$ cu $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \dfrac{8}{17}\cdot\dfrac{3}{5} + \sqrt{1-\dfrac{9}{25}}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2} = \dfrac{24}{85} + \dfrac{60}{85} = \dfrac{84}{85}$

3.1314A $E = \cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos a + \sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin a + \sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos a - \cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin a = \cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}-a\right) + \sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}-a\right) = \sqrt{2}$

3.1315A $E = \dfrac{\sin(45^o+\alpha) - \cos(45^o+\alpha)}{\sin(45^o+\alpha)+\cos(45^o+\alpha)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

3.1316A $E = \dfrac{\cos 5^o + \sin 25^o}{\cos 25^o - \sin 5^o} = \dfrac{\sin 85^o + \sin 25^o}{\cos 25^o - \cos 85^o} = \dfrac{2\sin 55^o \cos 30^o}{2\sin 55^o \sin 30^o} = \sqrt{3}.$

3.1317A $E = \operatorname{tg}15^o - \operatorname{tg}30^o - \operatorname{tg}60^o + \operatorname{tg}75^o = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^o}{1+\cos 30^o}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} + \dfrac{\operatorname{tg}45^o + \operatorname{tg}30^o}{1-\operatorname{tg}45^o\operatorname{tg}30^o} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} - \dfrac{4}{\sqrt{3}} + \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}.$

3.1318A Cât este $x = \sin(\alpha+\beta)$ dacă $\alpha, \beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ şi $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$? $\alpha = \dfrac{\pi}{6}, \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \beta = \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow \alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.1319A Relaţia $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ într-un triunghi are loc dacă este dreptunghic: $\sin^2 A + \dfrac{1-\cos 2B}{2} + \dfrac{1-\cos 2C}{2} = 2 \Rightarrow 2 - \cos^2 A + \cos A\cos(B-C) = 2 \Rightarrow \cos A(\cos(B-C) - \cos A) = 0$ deci $A = \dfrac{\pi}{2}$ sau $A = B - C \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{2}$.

3.1320A Dacă $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow E = \dfrac{\sin 3a - 2\sin a\cos^2 a}{\cos 3a - \cos a\cos 2a} =$

$\dfrac{3\sin a - 4\sin^2 a - 2\sin a\cos^2 a}{4\cos^2 a - 3\cos a - \cos a\cos 2a} = \dfrac{\sin a(1-2\sin^2 a)}{\cos a(2\cos^2 a - 2)} = \dfrac{\sin a\cos 2a}{-2\cos a\sin^2 a} = -\operatorname{ctg}2a$

3.1321A Care este valoarea expresiei $E = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ dacă $\alpha+\beta+\gamma = 0$? $0 = \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}}{1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma)}$ deci $E = 0$

3.1322A $E = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{-2\sin\alpha\sin\beta} = -\operatorname{ctg}\beta$

3.1323A Valoarea expresiei $\alpha = \arcsin\dfrac{8}{17} + \arcsin\dfrac{15}{17}$: $\sin\alpha = \sin(\arcsin\frac{8}{17})\cdot\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{15}{17})} + \sin(\arcsin\frac{15}{17})\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{8}{17})} = \dfrac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} + \dfrac{15}{17}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \dfrac{8^2}{17^2} + \dfrac{15^2}{17^2} = 1.$

3.1324A Pentru $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$, se cere valoarea expresiei $E = \dfrac{-\sin\alpha + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.

Utilizăm $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$: $E = \dfrac{-\frac{2x}{1+x^2} + 4\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} - 1} = 2x$

3.1325A Se cere valoarea sumei $S = \cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11}$. Fie $S' = \sin\dfrac{\pi}{11} + \sin\dfrac{3\pi}{11} + \sin\dfrac{5\pi}{11} + \sin\dfrac{7\pi}{11} + \sin\dfrac{9\pi}{11}$ şi $z = \cos\dfrac{\pi}{11} + i\sin\dfrac{\pi}{11}$. Atunci $S + iS' = z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 = z\dfrac{1-(z^2)^5}{1-z^2} =$

$= \left(\cos\dfrac{\pi}{11} + i\sin\dfrac{\pi}{11}\right)\dfrac{1-\left(\cos\frac{10\pi}{11} + i\sin\frac{10\pi}{11}\right)}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}\right)} = \left(\cos\dfrac{\pi}{11} + i\sin\dfrac{\pi}{11}\right)\cdot$

$\dfrac{2\sin^2\frac{5\pi}{11} - 2i\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}}{2\sin^2\frac{\pi}{11} - 2i\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}} = \dfrac{-2i\sin\frac{5\pi}{11}}{2i\sin\frac{\pi}{11}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{11} + i\sin\dfrac{5\pi}{11}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} = \dfrac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} = \dfrac{1}{2}$.

3.1326A $E = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

3.1327A Ştiind că $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{7}{5}$ şi $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ să se afle $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Notăm $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$ şi folosim formulele $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ deci:

$\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{7}{5}$; $6x^2 - 5x + 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ şi $x_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$

(Dacă luăm $x = \dfrac{1}{2} \to (\operatorname{tg})x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{4}{3} > 1$, fals deoarece $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$)

3.1328A Valoarea numerică pentru $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$ şi $\sin\dfrac{\pi}{8}$:

$\sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

3.1329A Valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $\sin x + \sin 3x = m$ nu are soluţii: evident,pentru început $|m| > 1$. Notăm $\sin^2 x = t$ şi obţinem $\sin x(3\sin x - 4\sin^3 x) = m \Leftrightarrow 4t^2 - 3t + m = 0$ cu $\Delta = 9 - 16m < 0$ pentru $m > \dfrac{9}{16}$. Dacă $-1 \le m \le \dfrac{9}{16}$ obţinem $t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16m}}{8} \le 1$. Deci $m \in (-\infty, -1) \cup (\dfrac{9}{16}, \infty)$

3.1330A Se dă $\operatorname{tg}\alpha = 3$ şi se cere $\sin 4\alpha$: $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\dfrac{3}{4}$,

$\sin 4\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \dfrac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{9}{16}} = -\dfrac{24}{25}$.

3.1331A $A = \{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} | x \in R, \sin x + \cos x = 1\}$; $\sin x + \cos x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} +$

$\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ deci $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1, \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ şi $A = \{0, 1\}$

3.1332A Dacă $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ şi $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ atunci $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = ?$:

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{3}, \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ dar soluţia este $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ deoarece $\sin\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha < \dfrac{\pi}{6}$ adică $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.1333A Soluţiile ecuaţiei $\operatorname{ctg}2x + \operatorname{tg}x = 0$: $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg}x} + \operatorname{tg}x = 0$, $1 + \operatorname{tg}^2 x = 0, x \in \emptyset$.

3.1334A Soluţiile ecuaţiei $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$: $\cos x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\sin x = 1$, $\cos x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x = 1, \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1, x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$

3.1335A Dacă $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}$ cât este $\cos x$: $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2}$

3.1336A $P = \sin 45^o \cos 60^o \operatorname{tg}30^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

3.1337B Se cere valoarea expresiei $E = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$:

fie $E' = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{6\pi}{7} \Rightarrow E + iE' = \left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$

$+ \left(\cos\dfrac{4\pi}{7} + i\sin\dfrac{4\pi}{7}\right) + \left(\cos\dfrac{6\pi}{7} + i\sin\dfrac{6\pi}{7}\right) = z + z^2 + z^3 =$

$= z\dfrac{1-z^3}{1-z} = \left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)\dfrac{1-\cos\frac{6\pi}{7} - i\sin\frac{6\pi}{7}}{1-\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}} = \left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)\cdot$

$\dfrac{2\sin^2\frac{3\pi}{7} - i2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin^2\frac{\pi}{7} - i2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}} = \dfrac{-2i\sin\frac{3\pi}{7}}{-2i\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\dfrac{4\pi}{7} + i\sin\dfrac{4\pi}{7}\right)$

deci $E = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{-2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\dfrac{\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -1$

3.1338B Care este valoarea expresiei $E = \sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} +$

$\sin^4\frac{7\pi}{16}$ Deoarece $\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$ rezultă $E=2-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{3}{2}$ căci $(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2})$.

3.1339B Valoarea expresiei $E=\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$:

Ca în **3.1337B**, $E+iE'=\left(\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{11}+i\sin\frac{4\pi}{11}\right)+$

$+\left(\cos\frac{6\pi}{11}+i\sin\frac{6\pi}{11}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{11}+i\sin\frac{8\pi}{11}\right)+\left(\cos\frac{10\pi}{11}+i\sin\frac{10\pi}{11}\right)=z+$

$z^2+z^3+z^4+z^5=z\frac{1-z^5}{1-z}=\left(\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}\right)\frac{1-\cos\frac{10\pi}{11}-i\sin\frac{10\pi}{11}}{1-\cos\frac{2\pi}{11}-i\sin\frac{2\pi}{11}}=$

$\left(\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}\right)\frac{-2i\sin\frac{5\pi}{11}\left(\cos\frac{5\pi}{11}+i\sin\frac{5\pi}{11}\right)}{-2i\sin\frac{\pi}{11}\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}\left(\cos\frac{6\pi}{11}+\right.$

$\left.+i\sin\frac{6\pi}{11}\right)$ deci $E=\frac{\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{6\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}=-\frac{2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=-\frac{1}{2}$

3.1340B Se cere $\cos x$ dacă $5\cos x+10\sin x-11=0$ şi $\cos x>\frac{1}{2}$

Rezultă $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ şi $\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{4\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{11}{5}\Rightarrow 16\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-20\mathrm{tg}\frac{x}{2}+6=$

0 deci $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ sau $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos x=\frac{3}{5}$ sau $\cos x=\frac{7}{25}<\frac{1}{2}$

3.1341B Se cere $E=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x$. Analog cu **3.1339B**, obţinem $E'+iE=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+$

$\ldots+(\cos 5x+i\sin 5x)=z+z^2+z^3+z^4+z^5=z\frac{1-z^5}{1-z}=(\cos x+$

$i\sin x)\frac{1-\cos 5x-i\sin 5x}{1-\cos x-i\sin x)}=(\cos x+i\sin x)\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos 3x+i\sin 3x),\ E=$

$\frac{\sin 3x\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

3.1342B $E=\sin[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x]=\sin[(k\pi+x)+\frac{\pi}{2}]=\cos(k\pi+x)=(-1)^k\cos x$.

3.1343B Valoarea lui $\sin\frac{\pi}{10}$: $\sin\frac{2\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=$

$=4\cos^3\frac{\pi}{10}-3\cos\frac{\pi}{10}\Rightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ deci $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Altfel: $\sin\pi=\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=$

$=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\left(4\cos^3\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{\pi}{5}\right)+\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right)\left(3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}\right)=$

$0\Rightarrow 16\cos^4\frac{\pi}{5}-12\cos^2\frac{\pi}{5}+1=0, \sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}$.

3.1344B $S=\sin\frac{15\pi}{2}+\cos\frac{15\pi}{2}=\sin\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=$

$\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=-1$

3.1345B Perioada principală a funcţiei $f(x)=\sin\frac{6x}{35}+\cos\frac{8x}{7}+\mathrm{tg}\frac{10x}{21}$;

Perioada principală a funcţiilor $\sin\alpha x, \cos\alpha x, \mathrm{tg}\alpha x$ este $\frac{2\pi}{\alpha}$ respectiv $\frac{2\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\alpha}$,

c.m.m.m.c(35,7,21)=105, c.m.m.d.c.(35,7,21)=7 deci $f(x)=\sin\frac{9}{105}\cdot 2x+$

$+\cos\frac{60}{105}\cdot 2x+\mathrm{tg}\frac{25}{105}\cdot 2x$ are perioada principală 105π.

3.1346B $E=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=$

$\sqrt{3}$.

3.1347B Perioada principală a funcţiei $f(x)=\sin 2x+|\sin x|$;

Funcţia $\sin 2x$ are perioada π iar $|\sin x|$ tot π deoarece $\sin(x+\pi)=-\sin x$.

3.1348B Numărul m de elemente ale mulţimii $M=\{1-\cos\frac{n\pi}{4}\}$. Funcţia $\cos\frac{n\pi}{4}$ are perioada 8 şi ia evident,în ordine, valorile $1,\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}.-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0,\frac{\sqrt{2}}{2}$ deci $m=5$

3.1349B Calculăm $\sin(\alpha+\beta),\cos(\alpha+\beta)$ dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\mathrm{tg}\alpha=-2, \mathrm{ctg}\beta=3$. Avem $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-2\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\alpha=$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}$ iar $\mathrm{ctg}=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}=3\Rightarrow\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}},\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ Deci

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\cos(\alpha+\beta)$

3.1350B Fie $x\in(9,50:10,80)$ şi $\sin x=-0,7$. Atunci $\operatorname{tg}x=\dfrac{7}{\sqrt{51}}$: $(9,50:10,80)\subset\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\cos x=-\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{10}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{51}}{10}$, $\operatorname{tg}x=\dfrac{7}{10}\dfrac{10}{\sqrt{51}}=\dfrac{7}{\sqrt{51}}$

3.1351B $E=(\operatorname{tg}^4x-6\operatorname{tg}^2x+1)\cos^4x+8\sin^2x\cos^2x=\sin^4x-6\sin^2x\cos^2x+\cos^4x+8\sin^2x\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)^2=1$.

3.1352B Cât este $\sin\alpha$ dacă $\operatorname{tg}\alpha=2$: $\sin^2\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.1353B $p=\operatorname{tg}15^o\cdot\operatorname{tg}35^o\cdot\operatorname{tg}55^o\cdot\operatorname{tg}75^o=?$ Avem $\dfrac{\sin15^o\sin75^o}{\cos15^o\cos75^o}=1$ şi $\dfrac{\sin35^o\sin55^o}{\cos35^o\cos55^o}=1$ deci $p=1$

3.1354B $E=\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{cosec}x+1}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sec x+1}+(\operatorname{cosec}x-1)(\sec x-1)=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}+\dfrac{\sin x}{\cos x+1}+\dfrac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}=\dfrac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2x}+\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2x}+\dfrac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=1$

3.1355B $E=\dfrac{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\frac{5\pi}{3}}+\dfrac{(\operatorname{tg})\frac{7\pi}{6}\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}{\cos\pi}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

3.1356B Perioada funcţiei $f(x)=\cos(ax+b)$ este $\dfrac{2\pi}{a}$ deoarece $f(x)=\cos ax\cos b-\sin ax\sin b$ iar perioadele lui $\sin ax$ şi $\cos ax$ sunt $\dfrac{2\pi}{a}$.

3.1357B $S=\arcsin a+\arccos a+\operatorname{arctg}a+\operatorname{arcctg}a=\pi$ deoarece se verifică uşor că $\arcsin a+\arccos a=\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}a+\operatorname{arcctg}a=\dfrac{\pi}{2}$ $(a=\sin(\arcsin a)=\sin(\frac{\pi}{2}-\arccos a)=\cos\arccos a=a,\ a=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}a)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}a)=a)$

3.1358B Se cere valoarea lui $a=\sin\alpha$ dacă $\alpha\in\left[\dfrac{3\pi}{2},3\pi\right]$ şi $\operatorname{tg}\alpha\in\left\{-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Pentru $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$ sau $\dfrac{11\pi}{4}$ deci $a=\sin\alpha=\sin\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sau $a=\sin\dfrac{11\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ iar pentru $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha=2\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $a=\sin\dfrac{13\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ deci $a\in\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$.

3.1359B Valoarea lui $E=\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$; deoarece $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{7\pi}{8}=\pi$, $\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{5\pi}{8}=\pi$, $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{5\pi}{8}=-\cos\dfrac{3\pi}{8}$, $\cos\dfrac{7\pi}{8}=-\cos\dfrac{\pi}{8}$ rezultă $E=2\left(\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}\right)2\left(\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{\pi}{8}\right)=$

$=2\left[\left(\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\dfrac{\pi}{8}\sin^2\dfrac{\pi}{8}\right]=2\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

3.1360B $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{7}\Rightarrow E=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\dfrac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}-1}=-\dfrac{9}{5}$.

3.1361B Cât este valoarea lui $\cos\alpha$ dacă $\sin\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$: $\sin^2\alpha=\cos\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha>0,\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

3.1362B Fie şirurile $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ cu $a_1=\sqrt{2}$, $b_n=\cos\dfrac{\pi}{2^n}$, $c_n=\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. Care din următoarele 3 relaţii este adevărată: $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$, $c_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-a_{n-1}}$, $c_{n-1}=2b_nc_n$.

$b_2=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, $b_3=\cos\dfrac{\pi}{2^3}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{a_2}{2},\ldots,$

$b_{n+1}=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}=$

$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}=\dfrac{a_n}{2}$; $c_1=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $c_2=\sin\dfrac{\pi}{2^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $c_3=\sin\dfrac{\pi}{2^3}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2-a_1}}{2},\ldots,c_{n+1}=\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-b_n}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-a_{n-1}}}{2}$; $2b_nc_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n}=\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}=a_{n-1}$. Deci toate relaţiile sunt adevărate.

3.1363B Care este valoarea sumelor: $E=\sin\dfrac{2004\pi}{4}+\sin\dfrac{2005\pi}{4}+\ldots+$

$\sin\frac{2021\pi}{4}$ şi $F=\cos\frac{2000\pi}{3}+\cos\frac{2003\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{2021\pi}{3}$? Funcţiile $\sin x$ şi $\cos x$ au perioada 2π rezultă că $E=3\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)=0$,

$F=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}\right)=0$

3.1364B Se cere valoarea expresiei $E=\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ dacă $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x+1}=\frac{2\frac{\sqrt{6}}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}, \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}, E=\sqrt{3}$.

3.1365B Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ dacă $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\cos\alpha$.

Avem $\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=2\cos\alpha$, $(4-\sqrt{3})\cos\alpha=\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha=4-\sqrt{3}$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-6}{11}.$$

3.1366B Să se determine valorile minime şi maxime ale expresiei $E=\frac{1+\sin 2x}{\cos x+\sin x}$. $E=\frac{\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ deci $-\sqrt{2}\le E\le\sqrt{2}$

3.1367B $m=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}=1.$$

3.1368B $E=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)-(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{\cos}\frac{\alpha+\beta}{2}=0$.

3.1369B $E=\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{8\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{8\cos 10^\circ}=\frac{1}{8}$.

3.1370B Forma cea mai simplă a expresiei $E=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+$

$+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$: $E=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}{2}+$

$+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha+\frac{\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

3.1371B Se cere $\alpha-\beta$ dacă $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha=\frac{1}{7}, \cos\beta=\frac{13}{14}$. Rezultă $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}, \sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}, \sin(\alpha-\beta)=$

$=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}\frac{13}{14}-\frac{3\sqrt{3}}{14}\frac{1}{7}=\frac{49\sqrt{3}}{49\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.

3.1372B În ce fel de triunghi are loc relaţia $\sin^2B\sin 2C+\sin^2C\sin 2B=\sin B\sin C\sin 2A$? Avem $\sin^2B\sin 2C+\sin^2C\sin 2B=\frac{1-\cos 2B}{2}\sin 2C+\frac{1-\cos 2C}{2}\sin 2B=\frac{1}{2}(\sin 2C+\sin 2B)-\frac{1}{2}(\cos 2B\sin 2C+\cos 2C\sin 2B)=\sin(B+C)\cos(B-C)-\sin(B+C)\cos(B+C)=\sin(B+C)\sin B\sin C$, deci este verificată pentru $A=\frac{\pi}{3}$.

3.1373B Se cere imaginea funcţiei $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\mapsto\mathbf{R}, f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ şi $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}\Rightarrow -1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)<2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2\cdot 1=2$ deci $\operatorname{Im}f=(-1,2]$.

3.1374B Dacă $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right), \beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \cos\beta=-\frac{1}{3}$ se cere valoarea lui $\sin(2\alpha+\beta)$, Avem $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}, \sin\beta=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin(2\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta(1-\sin^2\alpha)=2\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(1-2\cdot\frac{9}{25}\right)=\frac{24-14\sqrt{2}}{75}$.

3.1375B Se cere valoarea lui $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\beta}$ dacă $3\sin\alpha=\sin(2\beta+\alpha)$: $\sin(2\beta+\alpha)=\sin(\beta+\alpha)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=3\sin\alpha, 2\sin\alpha=\sin(2\beta+\alpha)-\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$ iar $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}+1-1=$

$=\frac{\sin(\beta+\alpha)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}-1=\frac{3\sin\alpha}{\sin\alpha}-1=2$.

3.1376B Să se exprime prin $\cos\frac{\alpha}{2}$ expresia $E=\frac{2\cos 3\alpha+2\cos\alpha-1}{4\sin^2\alpha+2\cos\alpha-3}$. Înlocuim în E $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$, $\sin^2\alpha=1-\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)^2$, $\cos 3\alpha=$

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ etc.

3.1377B $E = (1-\cos x\cos y)^2 - \sin^2 x\sin^2 y = (1-\cos x\cos y-\sin x\sin y)(1-\cos x\cos y+\sin x\sin y) = (1-\cos(x-y))(1-\cos(x+y)) = 2\sin^2\frac{x-y}{2}2\cdot 2\sin^2\frac{x+y}{2} = (\cos x-\cos y)^2$

3.1378B Să se exprime $\cos 5x$ prin $\sin x$ şi $\cos x$. $E = (\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - i10\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x \Rightarrow \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$.

3.1379B Să se eprime $\cos 5a$ prin $c = \cos a$; folosim **3.1378B** şi obţinem $\cos 5a = \cos a[\cos^4 a - 10\cos^2 a(1-\cos^2 a) + 5(1-\cos^2 a)^2] = 16c^5 - 10c^3 + 5c$.

3.1380B Se cere valoarea expresiei $E = m\sin 2a + n\cos 2a$ dacă $\operatorname{tg} a = \frac{m}{n}$,

$$E = m\frac{2\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}^2 a} + n\frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = m\frac{2\frac{m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}} + n\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}} = n.$$

3.1381B $E = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 4.$

3.1382B $E = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2(\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha} = 2.$

3.1383B $E = \cos^4\frac{\pi}{12} + \cos^4\frac{5\pi}{12} + \cos^4\frac{7\pi}{12} + \cos^4\frac{11\pi}{12} = 2\left(\cos^4\frac{\pi}{12} + \cos^4\frac{5\pi}{12}\right)$
$= 2\left(\cos^4\frac{\pi}{12} + \sin^4\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(1 - 2\cos^2\frac{\pi}{12}\sin^2\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \frac{7}{8}.$

3.1384B $E = 16\operatorname{ctg}16x + 8\operatorname{tg}8x + 4\operatorname{tg}4x + 2\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}x = \frac{16(1-\operatorname{tg}^2 8x)}{2\operatorname{tg}8x} +$
$8\operatorname{tg}8x + \ldots = 8\operatorname{ctg}8x + 4\operatorname{tg}4x + 2\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}x = \ldots = \operatorname{ctg}x$. Altfel folosim succesiv relaţia evidentă $2\operatorname{ctg}2x = \operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x$

3.1385B Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ dacă $3\sin x + 4\cos x = 5$: $\frac{3\cdot 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{4-4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$
$5\ ,\ 6t + 4 - 4t^2 = 5 + 5t^2 \Rightarrow 9t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = \frac{1}{3}.$

3.1386B Să se rezolve ecuaţia $\arcsin(1-x) = \arccos(1+x)$: $1 - x = \sin(\arcsin(1-x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(1+x))} = \sqrt{1-(1+x)^2} \Rightarrow 2x^2 = 1$, ecuaţia nu are soluţii căci $-1 \le 1-x \le 1$ şi $-1 \le 1+x \le 1 \Rightarrow x \in [-2,0]\cap[0,2] = \{0\}$ dar $x = 0$ nu este soluţie a ecuaţiei.

3.1387B Dacă $\cos 2\alpha \in [-1,1] - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ să se determine x din relaţia

$\frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x)$. Notăm $\cos 2\alpha = a, \cos 2x = t$ şi obţinem $\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)} = \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos 2x + \cos 2\alpha} = \frac{1-2\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}, \frac{t-a}{t+a} = \frac{1-2a}{1+2a} \Rightarrow$
$t = \frac{1}{2}, \cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

3.1388B Se cere perioada principală a funcţiei $f(x) = \cos 3x + \cos^4 x$. Deoarece $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{4}$ şi $\cos 4x$ are perioada $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\cos 2x$ are perioada $\frac{2\pi}{2} = \pi$ iar $\cos 3x$ are perioada $\frac{2\pi}{3}$, perioada lui f este $4\cdot\frac{\pi}{2} = 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi$.

3.1389C Perioada principală a funcţiei $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}$ este $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

3.1390C Pentru ce valori ale lui x nu are sens expresia $E = \operatorname{tg}2x + \sec 2x - \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$? Sunt valorile pentru care avem $\cos 2x = 0 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ şi $\operatorname{tg}x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ deci putem spune că expresia nu e definită pentru $x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

3.1391C Să se calculeze $\cos(a-b)$ ştiind că $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos a = \frac{3}{5}, \sin b = \frac{5}{13}$. Avem $\sin a = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}, \cos b = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$.

3.1392C Să se expliciteze funcţia $f(x) = \arcsin(\sin x), x \in [0,\pi]$. Deoarece $f'(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$ avem $f'(x) = 1$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f'(x) = -1$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ deci $f(x) = \begin{cases} x + C_1 & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -x + C_2 & , x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} = \begin{cases} x & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -x + \pi & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$
deoarece f este continuă şi în $\frac{\pi}{2}$ ia valoarea $\frac{\pi}{2}$, deci $C_1 = 0$ şi $C_2 = \pi$.

3.1393C $\alpha = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

3.1394C Relaţia $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}3x + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x = 0$ este satisfăcută pentru orice x pentru care expresiile ce intervin au sens, deoarece $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}3x(1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x)$.

3.1395C Fie $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi $y \in \left(\frac{19}{4}, \frac{21}{4}\right)$, atunci $-1 < \sin x + \sin y < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$: $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi $y \in \left(\frac{19}{4}, \frac{21}{4}\right) \subset \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin y \in \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.1396C Să se calculeze valoarea expresiei $E = \arccos\frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. $\cos E = \cos(\arccos\frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) = \cos(\arccos\frac{1}{3})\cos(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) + \sin(\arccos\frac{1}{3})\sin(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+8}} + \sqrt{1-\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{\frac{8}{1+8}} = \frac{1+8}{9} = 1$, deci $E = 0$.

3.1397C Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$ dacă $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ şi $\sin\alpha < \cos\alpha$. Deoarece $\sin\alpha < -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ deci $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$.

3.1398C Care sunt valorile constantelor m, n, p astfel încât $E = \sin^4 x + \cos^4 x + m(\sin^6 x + \cos^6 x) + n(\sin^8 x + \cos^8 x) + p(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = 1$ Notăm $t = \sin^2 x \cos^2 x$ şi exprimăm E ca polinom în t: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2t$; $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3t$; $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^4 - 4\sin^2 x\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) - 6(\sin^2 x\cos^2 x)^2 = 1 - 4t(1-2t) - 6t^2$; $\sin^{10} x + \cos^{10} x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^5 - 5\sin^2 x\cos^2 x(\sin^6 x + \cos^6 x) - 10\sin^4 x\cos^4 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 5t(1-3t) - 10t^2$, deci $1 - 2t + m(1-3t) + n(1-4t+2t^2) + p(1-5t+5t^2) = 1$. Rezultă sistemul $m + n + p = 0$, $2n + 5p = 0$, $3m + 4n + 5p = -2 \Rightarrow m = 6, n = -10, p = 4$.

3.1399C Formula $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$ este adevărată pentru o infinitate de perechi (x, y) cu $x, y \in [0, 2\pi]$: $\cos(x+y) - \cos x = \cos y \Rightarrow -2\sin\left(x + \frac{y}{2}\right)\sin\frac{y}{2} = \cos y \Rightarrow \sin\left(x + \frac{y}{2}\right) = -\frac{\cos y}{2\sin\frac{y}{2}}$; dacă $\left|\frac{\cos y}{2\sin\frac{y}{2}}\right| \leq 1$ atunci $x = -\frac{y}{2} - \arcsin\frac{\cos y}{2\sin\frac{y}{2}}$, deci o infinitate de perechi.

3.1400C $\cos^8 x - \sin^8 x = (\cos^4 x - \sin^4 x)(\cos^4 x + \sin^4 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x] = (2\cos^2 x\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - \cos^2 x)$.

3.1401C Fie $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ astfel încât $3f(x) + f(-x) = 4\sin x\cos x\ \forall x \in \mathbf{R}$ verificând răspunsurile din grilă prin înlocuire directă observăm că $f(x) = \sin 2x$.

3.1402C Determinaţi $E = \operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o\operatorname{tg}3^o \ldots \operatorname{tg}87^o\operatorname{tg}88^o\operatorname{tg}89^o$. Grupăm în perechi $\operatorname{tg}k^o\operatorname{tg}(90^o - k^o) = \operatorname{tg}k^o\operatorname{ctg}k^o = 1$, deci $E = (\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}89^o)\ldots(\operatorname{tg}44^o\operatorname{tg}46^o)\operatorname{tg}45^o = 1$.

3.1403C Să se afle $E = \frac{\sin\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}}$. $E = \frac{\sin\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}} + \frac{\sin^2\frac{5\pi}{12} - \cos^2\frac{5\pi}{12}}{\sin^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}} - \cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.1404C Cea mai mică valoare a lui $f(x) = \cos x - \sin x$ pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ este $-\sqrt{2}$: $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq -1$.

3.1405C Triunghiul în care are loc relaţia $\sin^2 A + 2\cos A\sin B\sin C = 1$ este dreptunghic în A sau $B - C = \pm 90^o$: $-\cos^2 A + 2\cos A\sin B\sin C = 0, \cos A[\cos(B+C) + 2\sin B\sin C] = 0, \cos A(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = 0, \cos A\cos(B-C) = 0$.

3.1406C Fie $x, y \in (0, 1]$ şi $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2^y$. Atunci valoarea expresiei $E = y^2\sin^2 2x + y\sin 2x + 1$ este $E = 3$ obţinută pentru $x = \frac{\pi}{4}$ şi $y = 1$. Relaţia $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2^y$ se scrie $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2^y$. Dar $x \in (0, 1] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2x \in (0, \pi), 0 < \sin 2x \leq 1, \frac{2}{\sin 2x} = 2^y \geq 2 \Rightarrow y \geq 1$ deci $y = 1, \sin 2x = 1, x = \frac{\pi}{4}$ iar $E = 3$.

3.1407C Să se calculeze $E = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ în funcţie de $m = \sin\alpha + \cos\alpha$ dacă $m \neq \pm 1$. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha = m^2, E = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2 = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{m^2-1}\right)^2 - 2 = \frac{4 - 2(m^2-1)^2}{(m^2-1)^2}$.

3.1408C Vezi **3.1337B**.

3.1409C Are loc formula $\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1 - (\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a\operatorname{tg}c + \operatorname{tg}b\operatorname{tg}c)}$: $\operatorname{tg}(a+b+c) =$

$= \dfrac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}c} = \dfrac{\operatorname{tg}c+\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}}{1-\operatorname{tg}c\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}} = \dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-(\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c)}$.

3.1410C $E = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ + \cos 105^\circ + \cos 165^\circ = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \sin 15^\circ - \sin 75^\circ = 0$.

3.1411C Cât este $\operatorname{tg}(a+b+c)$ dacă $\operatorname{tg}a = \dfrac{1}{2}, \operatorname{tg}b = \dfrac{1}{5}, \operatorname{tg}c = \dfrac{1}{8}$. Aplicăm

3.1409C şi obţinem $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{8}}{1-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{8}\right)} = \dfrac{45}{80}\cdot\dfrac{80}{45} = 1.$

3.1412C Forma cea mai simplă a expresiei $E = \dfrac{\sin x}{\sin\dfrac{\pi-x}{3}} + \dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{\pi-x}{3}}$,

$x \in [0,\pi)$; $E = \dfrac{\sin x\cos\dfrac{\pi-x}{3}+\sin\dfrac{\pi-x}{3}\cos x}{\sin\dfrac{\pi-x}{3}\cos\dfrac{\pi-x}{3}} = \dfrac{2\sin\dfrac{2x+\pi}{3}}{\sin\dfrac{2(\pi-x)}{3}} = 2.$

$\left(\dfrac{2x+\pi}{3}+\dfrac{2(\pi-x)}{3} = \pi\right)$.

3.1413C $E = \sin\left(\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{15}{17}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}\cdot\cos\arccos\frac{15}{17} + \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{15}{17}\right)}\cdot\cos\arccos\frac{3}{5} = \sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{15}{17}+\sqrt{1-\frac{225}{289}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{84}{85}$.

3.1414C În ce fel de triunghi este valabilă relaţia $\sin^2 2A = \sin^2 2B + \sin^2 2C + \sin 2B\sin 2C\cos 2A$, $1-\cos^2 2A = \dfrac{1-\cos 4B}{2}+\dfrac{1-\cos 4C}{2}+\sin 2B\sin 2C\cos 2A$, $\dfrac{1}{2}(\cos 4B+\cos 4C) = \cos 2A(\cos 2A+\sin 2B\sin 2C)$ deoarece $\cos 2A = \cos 2(\pi-B-C) = \cos[2\pi-2(B+C)] = \cos 2(B+C) \Rightarrow \cos 2A[\cos 2(B-C)+\cos 2B\cos 2C] = 0$, $\cos 2A\sin 2B\sin 2C = 0$ deci $B = \dfrac{\pi}{2}$ sau $C = \dfrac{\pi}{2}$.

3.1415C Fie $A = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \sin(x+\alpha\pi) = \sin x + \sin\alpha\pi, \forall x \in \mathbf{Q}\}$. Care este mulţimea A? $\sin(x+\alpha\pi)-\sin x = \sin\alpha\pi$, $2\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\cos\left(x+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{x+\alpha\pi}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha\pi}{2} = n\pi, \alpha = 2n$ deci $A = 2\mathbf{Z}$.

3.1416C3.1417C Dacă $A+C = 2B$ şi $\sin A\sin C = \sin^2 B$, $A \geq C$ cât sunt unghiurile A, B, C ale unui triunghi. $A+B+C = 3B = \pi \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{3}$, $A+C = \dfrac{2\pi}{3}$, $\sin A\sin C = \sin^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{4}$, $\cos(A+C) = \cos A\cos C - \sin A\sin C = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos A\cos C = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ deci $\cos(A-C) = \cos A\cos C+\sin A\sin C = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} = 1$ şi $A-C = 0, A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ triunghiul este echilateral.

3.1418CCât este B^2-AC dacă $A = a\cos^2\alpha+2b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha$, $B = c\sin\alpha\cos\alpha+b\cos^2 2\alpha-a\sin\alpha\cos\alpha$, $C = a\sin^\alpha-2b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$. Observăm că $A = \frac{a+c}{2}+\left[\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha\right]$, $C = \frac{a+c}{2}-\left[\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha\right]$, $B = \frac{c-a}{2}\sin 2\alpha+b\cos 2\alpha$, $AC = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha\right)^2$ şi înlocuind obţinem $B^2-AC = b^2-ac$.

3.1419C Să se determine valorile lui $\sin\frac{\pi}{10}$ şi $\cos\frac{\pi}{5}$: $\sin\frac{2\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10}-3\cos\frac{\pi}{10} \Rightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1 = 0$, $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Altfel, $\sin\pi = \sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ de unde rezultă $16\cos^4\frac{\pi}{5}-12\cos^2\frac{\pi}{5}+1 = 0$.

3.1420C Dacă $E = \frac{\cos a+\cos b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}$, $a, b \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $E < 0$. $E = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\left(1-\cos\frac{a+b}{2}\right) < 4)$.

3.1421C Se dă $\cos x = \frac{3}{5}$ şi se cere $\cos 2x$ şi $\sin 3x$: $\cos 2x = 2\cos^2 x-1 = 2\frac{9}{25}-1 = -\frac{7}{25}$, $\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x = \sin x(3-4\sin^2 x) = \frac{4}{5}\cdot\frac{11}{25} = \frac{44}{125}$.

3.1422C Dacă $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ şi $x = \cos\frac{\alpha}{4}$ să se determine x. Limităm $\alpha \in (0,2\pi)$ deci $1^\circ\ \alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ sau $2^\circ\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ şi avem $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ sau $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$.

3.1423C Maximul expresiei $E(a) = \sin^2 2a-\sin a\sin 3a$ este 1. $E(a) = 4\sin^2 a\cos^2 a-\sin^2 a(3-4\sin^2) = \sin^2 a(4\cos^2 a-3+4\sin^2 a) = \sin^2 a$.

3.1424C Sistemul $2\cos 2x+2\cos 2y = 1$, $2\cos x+2\cos y = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ nu are soluţii. Se obţine $\cos^2 x+\cos^2 y = \frac{5}{4}$ şi $\cos x+\cos y = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ de unde $\cos x = \sqrt{3}$ sau $\cos x = \sqrt{2}$ etc. deci nu are soluţii.

3.1425C Să se restrângă expresiile $E = 1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$, $F = \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$. $E+iF = 1+(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+(\cos nx+i\sin nx) = 1+z+z^2+\ldots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1-\cos(n+1)x-i\sin(n+1)x}{1-\cos x+i\sin x} = \dfrac{2\sin^2\frac{(n+1)x}{2}-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

3.5 Ecuaţii trigonometrice

3.1426A Soluţiile ecuaţiei $\sin x\cos x = 1 : 2\sin x\cos x = 2$, $\sin 2x = 2$, deci $x \in \emptyset$ nu are soluţie.

3.1427A $\sqrt{3}\mathrm{tg}x = 1$, $x \in [0, 2\pi] : \mathrm{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$.

3.1428A Numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ din $[-\pi, 2\pi]$, $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ deci 3.

3.1429A Aflaţi valorile lui $k \in \mathbf{Z}$ pentru care $x = \frac{k\pi}{2}$ este soluţie a ecuaţiei $\sin x = -1$, $x \in [\pi, 5\pi] : x = \frac{3\pi}{2}, 2\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \{3, 7\}$.

3.1430A În ce cadrane se află soluţiile ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ care verifică inegalitatea $\cos x < 0$, $x = \frac{5\pi}{6}$, deci cadranul II.

3.1431A Dacă $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $a = \cos x$, atunci $a = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $a = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

3.1432A $\sin(m+y) = 0 \Rightarrow m + y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, deci $y = k\pi - m$

3.1433A Condiţiile de existenţă pentru ecuaţia $\mathrm{tg}x = 1 : \cos x \neq 0, x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

3.1434A Dacă $\frac{3}{1-\cos x} = 1$ atunci $x \in \emptyset$ deoarece $\cos x = -2$ nu are soluţii.

3.1435A Soluţiile ecuaţiei $|\cos x| = 1$ sunt $x \in k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ($\cos x = \pm 1$).

3.1436A Câte soluţii raţionale are ecuaţia $\arccos x = \frac{\pi}{3}$? $x = \frac{1}{2}$, deci 1.

3.1437A Dacă $\arcsin x = \arccos x$ atunci $x = \frac{\sqrt{2}}{2} : \arcsin x + \arccos = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ deci $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.1438A Câte numere $x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$ satisfac ecuaţia $a|\cos 2x| = 1$. Evident $x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \pi\}$ deci 3 numere.

3.1439A Dacă $\sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, atunci $x \in \emptyset$ deoarece $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, $|\sin x| \leq 1$.

3.1440A $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.

3.1441A Numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 = 0$ din $[0, 8\pi] : \sin x = 0, \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, deci 5 soluţii.

3.1442A $\sin x + \sin 2x = 0$, $x \in (0, 2\pi) \Rightarrow x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$, deci $x \in \{\pi, \pi \pm \frac{\pi}{3}\}$ deoarece $\sin x(1 + 2\cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = -\frac{1}{2}$.

3.1443A O soluţie a ecuaţiei $\cos x\cos 2x\cos 4x = -1$ este evident $x = \pi$.

3.1444A Soluţia ecuaţiei $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ din $[0, \frac{\pi}{2}]$ este $\frac{\pi}{3}$ ($\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

3.1445A Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x = 1$, $\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x \in \left\{2k\pi, 2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right\}$ sau $x \in \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

3.1446A Să se determine $\mathrm{tg}x$ dacă $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$, $x - \frac{\pi}{4} = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{tg}x = 1$. Altfel $(\cos x + \sin x)^2 = 2$, $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2}$.

3.1447A Numărul n de rădăcini ale ecuaţiei $\cos 2x(2\sin x - 1) = 0$ din intervalul $[0, 2\pi] : \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ iar $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ deci $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ şi $n = 6$.

3.1448A Să se calculeze suma S a soluţiilor din $[-2\pi, 2\pi]$ ale ecuaţiei $\cos 2x - 2\sin x + 3 = 0$: $1 - 2\sin^2 x - 2\sin x + 3 = 0$, $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$, $x = -\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ deci $S = -\pi$.

3.1449A Soluţiile ecuaţiei $\sin^7 x + \cos^7 x = 1$ din intervalul $[0, 2\pi]$: Dacă $\sin x < 0$ atunci $\cos x > 1$ imposibil, deci $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. $\cos x = 1$ sau $\sin x = 1$ sunt soluţii deoarece $\sin x < 1$, $\cos x < 1 \Rightarrow \sin^3 x < \sin^2 x$, $\cos^3 x < \cos^2 x$, $\sin^3 x + \cos^3 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Deci $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$.

3.1450A Soluţiile ecuaţiei $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1 : 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$.

3.1451A Să se calculeze $E = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{(1+i)^n + (1-i)^n} : 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow E = \frac{\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} - \left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)} = i\mathrm{tg}\frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{4k + 2 | k \in \mathbf{Z}\}$.

3.1452A Soluţiile ecuaţiei $4\sin x - \cos 2x + 3 = 0 : 4\sin x - (1 - 2\sin^2 x) + 3 = 0$, $2\sin^2 x + 4\sin x + 2 = 0$, $(\sin x + 1)^2 = 0$, $\sin x = -1$, $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

3.1453A $\sin x = \sqrt{3}\cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}] : \mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, deci $x = \frac{\pi}{3}$.

3.1454A Să se rezolve ecuaţia $\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x = \frac{3}{2}$. Rezultă $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = n\pi \pm \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1455A Să se rezolve ecuaţia $\sin 2x - 4\cos x = 0 : 2\sin x\cos x - 4\cos x = 0$, $\cos x(\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ sau altfel $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

3.1456B Soluţiile ecuaţiei $8\cos x - 1 = 4\sin^2 x : 4\cos^2 x + 8\cos x - 5 = 0$, $(\cos x)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4}$, deci $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

3.1457B Soluţiile ecuaţiei $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$, $x \in (0, \pi)$: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$, $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{12}$, deci $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.

3.1458B Să se rezolve în $[0, 2\pi]$ inecuaţia $\sin 2x + \cos x \leq 0$: $\cos x(2\sin x + 1) < 0$, facem tabelul semnelor:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	$++$	0	$--$	$--$	$--$	0	$++$
$2\sin x+1$	$++$	$++$	$++$	0	$--$	0	$++$
$\cos x(2\sin x+1)$	$++$	0	$--$	0	$++$	0	$++$

deci $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$.

3.1459B Numărul n al soluţiilor $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$, în $[0,\frac{\pi}{2}]$ avem o soluţie, $x=\frac{5\pi}{12}$ deci $n=1$.

3.1460B Să se calculeze suma S a soluţiilor din intervalul $[0,4\pi]$ ale ecuaţiei $\sin^3x+\cos^3x=1$. Se procedează ca în 3.1449A şi obţinem $\sin x=1$ şi $\cos x=0$ sau $\cos x=1$ şi $\sin x=0$ deci $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},2\pi,\frac{5\pi}{2},4\pi\right\}$ şi $S=9\pi$.

3.1461B Să se determine $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ astfel încât $1+\cos4x=(\sin x-\cos x)^2$; $2\cos^2 2x=2(\cos^2x-\sin^2x)^2=(\cos x-\sin x)^2\Rightarrow(\cos x-\sin x)^2[2(\cos x+\sin x)^2]=0$ şi rezultă $\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ sau $\cos x+\sin x=+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}>\frac{\pi}{2}$ deci rămâne $x=\frac{\pi}{4}$.

3.1462B Să se determine soluţia comună a ecuaţiilor $\sin x+\cos x=0$ şi $\sin^2x-\sin2x-3\cos^2x=0$ din $(3\frac{\pi}{2},2\pi)$. $\sin x+\cos x=0$ are în $(3\frac{\pi}{2},2\pi)$ singura soluţie $x=\frac{7\pi}{4}$ care verifică şi a doua ecuaţie.

3.1463B Să se rezolve ecuaţia $2\cos2x=8\cos x-5:2(2\cos^2x-1)=8\cos x-5$, $\cos^2x-2\cos x+\frac{3}{4}=0$, $\cos x=1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ deci $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3.1464B Să se rezolve ecuaţia $x^5-\left(\frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}\right)^4=0$. $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}\right)^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^4=$ $=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. $x_k=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{3}}{5}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{3}}{5}\right)$ sau $x_k=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2,3,4$.

3.1465B Valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $3m\sin2x+(m+1)\cos2x-1=0$ admite soluţii: ecuaţia se scrie $3m\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}+(m+1)\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}-1=0$ şi notând $\operatorname{tg}x=t$ avem $(m+2)t^2-6mt-m=0$ cu $\Delta=10m^2+2m\geq0$, $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]\cup[0,\infty)$.

3.1466B Să se rezolve ecuaţia $2^{\sin x+\sin2x}=1$. $\sin x+\sin2x=0$, $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$, $\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $x\in\left\{k\pi,2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}|k,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

3.1467B Soluţiile inecuaţiei $\sin x+\cos x\geq1$ din intervalul $[-\pi,\pi]$, $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq1$,

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}$ deci $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

3.1468C Soluţia ecuaţiei $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2})=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3\cdot2}}=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=1$.

3.1469C $2\sin^2x=\sin2x$, $2\sin x(\sin x-\cos x)=0\Rightarrow\sin x=0$ sau $\cos x=\sin x$ deci $x\in\{k\pi,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

3.1470C Rezolvaţi ecuaţia $\cos2x+(2m-1)\sin x+m-1=0$ pentru $m>1$, $1-2\sin^2x+(2m-1)\sin x+m-1=0$, $2\sin^2x-(2m-1)\sin x-m=0$, $\sin x=-\frac{1}{2},m$ deci $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x=k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3.1471C Pentru câte valori ale lui $m\in Q$ ecuaţia $1+\sin^2mx=\cos x$ are o singură soluţie. Deoarece $|\cos x|\leq1$ întotdeauna $\sin^2mx=0$ deci $mx=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{m}$: $\cos x=1\Rightarrow x=2n\pi$, $k=2nm$, cu $m=\frac{p}{n}$, $m,n,p\in\mathbf{Z}$. Deci nu există nici un m pentru care să avem soluţie unică.

3.1472C Câte soluţii comune au ecuaţiile $6\sin^2x+3\sin x\cos x-5\cos^2x=2$, $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=2$? Deoarece $a+\frac{1}{a}=2$ cu $a>0\Rightarrow a=1$ rezultă $\operatorname{tg}x=\pm1$ deci $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$. Dar prima ecuaţie este verificată numai de soluţiile $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$. Soluţii comune sunt o infinitate.

3.1473C Pentru $m\in\mathbf{R}$ fie ecuaţia $2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-m-1=0$, $A=\{m\in\mathbf{R}|$ ecuaţia are soluţii$\}$ şi $S=$ suma soluţiilor ecuaţiei din $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pentru $m=-1$. Să se determine A şi S. Ecuaţia se scrie $\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=m$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin2x+\cos2x=m$, $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{m}{2}$, deci $m\in[-2,2]$ şi $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3},-\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ deci $S=-\frac{\pi}{6}$.

3.1474C Să se calculeze suma $S_n=2+\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos3\alpha}{\cos^3\alpha}+\ldots+\frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}$. $S_n+iS_n'=1+\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos2\alpha+i\sin2\alpha}{\cos^2\alpha}+\ldots+\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos^n\alpha}=1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1-\frac{\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}}{1-\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos^{n+1}\alpha-\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha}{-i\sin\alpha\cdot\cos^n\alpha}\Rightarrow S_n=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}$.

3.1475C Să se determine x dacă $\sin(\frac{1}{3}\arccos x)=1$. $\sin3\left(\frac{\arccos x}{3}\right)=3\sin\left(\frac{\arccos x}{3}\right)-4\sin^3\left(\frac{\arccos x}{3}\right)$; $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$ (radicalul se ia cu + (plus) deoarece $0\leq\arccos x\leq\pi$ şi $\sin\alpha>0$ pentru $\alpha\in[0,\pi]$) deci $3-4=-1\sqrt{1-x^2}$ imposibil adică ecuaţia nu are soluţii. Altfel, direct: $\frac{1}{3}\arccos x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $\arccos x=6k\pi+\frac{3\pi}{2}$ imposibil, deoarece $0\leq\arccos x\leq\pi$.

3.1476C Determinăm $A=\{x\in\mathbf{R}|\cos(3\arccos x)=\cos(2\arccos x)+1$. $\cos(3\arccos x)=4\cos^3(\arccos x)-3\cos(\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1+1\Rightarrow4x^3-3x=2x^2$, $x[4x^2-2x-3]=0$, $x=0$, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{4}$, $\frac{1+\sqrt{13}}{4}>1$ deci soluţiile sunt $x=0$, $x=\frac{1-\sqrt{13}}{4}$.

3.1477C Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=\operatorname{tg}^6 x$: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{1-\frac{1}{\sin^2}}=\frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}=\operatorname{tg}^6 x$ deci este o identitate pe $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$= domeniul de definiţie al egalităţii.

3.1478C Fie funcţiile $\operatorname{sgn} u=\begin{cases}1, & u>0\\ 0, & u=0\\ -1, & u<0\end{cases}$ şi $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{2x}\right)$, $x\in(0,1]$. Să se rezolve ecuaţia $f(x)+f(y)=2$, unde $x,y>\frac{1}{7}$. Din enunţ rezultă $f(x)=f(y)=1$ deci $\cos\frac{\pi}{2x}>0$, $\cos\frac{\pi}{2y}>0$. $0<\frac{1}{x}<7$, $0<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}<\frac{7\pi}{2}$ deci $0<\frac{\pi}{2x}<\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2x}<\frac{5\pi}{2}\Rightarrow 1<x$ nu convine , rămâne $\frac{1}{5}<x<\frac{1}{3}$, soluţia este dată de $(x,y)\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)^2$.

3.6 Aplicaţii ale trigonometriei în algebră

3.1479A Argumentul redus al numărului complex $i^8+1=2$ este 0.

3.1480A Dacă $z=x+iy$ şi $\arg z\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ atunci evident $y>0$.

3.1481A Dacă $E=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ atunci $a=E^{12}=\cos\frac{12\pi}{6}+i\sin\frac{12\pi}{6}=1$.

3.1482A Dacă $|z|=5$ şi $\alpha=\arg z$ atunci $\alpha\in\mathbf{R}$.

3.1483A Argumentul redus al lui $z=(1-i)^2=-2i$ este $\frac{3\pi}{2}$ $(-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$.

3.1484A Dacă $|z|=2$ şi $\arg z=\frac{3\pi}{4}$ atunci $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(-1+i)$.

3.1485A Fie $z=x+iy\neq 0$ cu $\arg z=\frac{\pi}{6}$. Atunci $\frac{y}{x}=\frac{\rho\sin\frac{\pi}{6}}{\rho\cos\frac{\pi}{6}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.1486A Dacă $z^2-2z\cos\alpha+1=0$, $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$ şi $\operatorname{Im}z>0$ se cere valoarea $\arg z$. $z_{1,2}=\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha-1}=\cos\alpha\pm i|\sin\alpha|$, alegem $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, deci $\arg z=\alpha$.

3.1487A Pentru $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ cu $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, rezultă $\arg z=\frac{11\pi}{6}$ $(z=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})$.

3.1488A Dacă $w\in\{z^{800}|z\in\mathbf{C},\ |z|+2=0$ atunci $w\in\emptyset$ $(|z|+2=0,\ |z|\geq 0$.

3.1489A Mulţimea punctelor din plan cu afixul $z\in\mathbf{C}^*$ şi $\arg z=\frac{\pi}{4}$ este o semidreaptă, $y=x$, $x>0$.

3.1490A Dacă $|z|=1$ şi $\arg z\in\{3,7\}$ atunci $z=\cos 3+i\sin 3$ (deoarece $7>2\pi$).

3.1491A Punctele de afix z unde $|z|=2002$ şi $arg z=0$: un punct, $x=2002$, $y=0$.

3.1492A Dacă $\arg\bar{z}=\frac{\pi}{3}$, atunci $\arg z=\frac{5\pi}{3}$ ($\bar{z}$ este simetricul lui z faţă de Ox).

3.1493A Pentru $z_n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$, numărul z_3+z_6 este 0 deoarece $z_3+z_6=\cos\pi+i\sin\pi+\cos 2\pi+i\sin 2\pi=-1+1=0$.

3.1494A Mulţimea $A=\{z=x+iy\in\mathbf{C}|z^{100}-1=0,x\geq 0,y\geq 0\}$ are 26 de elemente. $A=\{z_k|z_k=\cos\frac{2k\pi}{100}+i\sin\frac{2k\pi}{100},\ k=0,1,2,\ldots,25\}$ deci $n=26$.

3.1495A Dacă $z=\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}$, atunci $z^{10}=\cos\frac{10\pi}{15}+i\sin\frac{10\pi}{15}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1496A Forma trigonometrică a lui $z=1+\cos a+i\sin a$, $a\in(0,\pi)$ este: $z=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$, $\arg z=\frac{\alpha}{2}$.

3.1497A $E=\frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)^5}=\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{2^{10}}=\frac{2^6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6}{2^{10}}=\frac{\cos\pi+i\sin\pi}{2^4}=-\frac{1}{16}$.

3.1498A $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2001}=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}\right)^{2001}=2^{\frac{2001}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\right.$
$\left.+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{2001}=(\sqrt{2})^{2001}\left(\cos 2001\cdot\frac{7\pi}{12}+i\sin 2001\cdot\frac{7\pi}{12}\right)=$
$=\sqrt{2}^{2001}\left(\cos\left(1167\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1167\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{1000}(-1-i)$.

3.1499A $z^4=i$ are soluţiile $z_k=\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}$, $k=0,1,2,3$.

3.1500A $E=\frac{\cos a+i\sin a}{\sin a+i\cos a}+\frac{\cos a-i\sin a}{\sin a-i\cos a}=\frac{\cos a+i\sin a}{i(\cos a-i\sin a)}+\frac{\cos a-i\sin a}{-i(\cos a+i\sin a)}=$
$\frac{1}{i}(\cos 2a+i\sin 2a-(\cos 2a-i\sin 2a))=2\sin 2\alpha$.

3.1501A Fie $w\neq 1$. $w^n=1$ si $S=1+w+w^2+\ldots+w^{n-1}$. $S=\frac{1-w^n}{1-w}=0$.

3.1502A Fie $z=\frac{1+i}{1-i}$. Să se calculeze $|z|$ şi $\arg z$ $(0\leq\arg z<2\pi)$, $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$ deci $|z|=|i|=1$, $\arg z=\arg i=\frac{\pi}{2}$.

3.1503B Soluţiile ecuaţiei $(z+1)^n-(z-1)^n=0$. Deoarece $z=1$ nu este soluţie scriem $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$. Notăm $w=\frac{z+1}{z-1}$, $w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$. $w_k=\frac{z_k+1}{z_k-1}$, $z_k=-\frac{1+w_k}{1-w_k}=-\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}}=$
$-\frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}=-\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}=-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$.

3.1504B Numerele $z\in\mathbf{C}$ ce satisfac $|z|^3-3|z|^2+2|z|\leq 0$, $\operatorname{Re}z=0$ reprezintă reuniunea a două segmente şi un punct $z=0$, $x=0$, $1\leq y\leq 2$, $-2\leq y\leq -1$ deoarece $1\leq|z|\leq 2$ deci o coroană circlară intersectată cu axa imaginară.

3.1505B Să se calculeze $w=\frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3}$. $w=\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3}=-2i$.

3.1506B Fie z_1,z_2,z_3 cele trei valori ale radicalului $\sqrt[3]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i}}$. Să se afle

valoarea sumei $z_1^2+z_2^2+z_3^2$. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$. $z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{12}}{3}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{12}}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{36}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{36}\right)\right)$, $k=0,1,2$. $S=z_1^2+z_2^2+z_3^2=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+\right.$ $\left.+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{18}\right)\right]=0$.

3.1507B Fie z_1,z_2 soluţiile ecuaţiei $z^6=1$ cu partea reală pozitivă şi $a=|z_1-z_2|$, $b=z_1z_2$. Se cer valorile lui a şi b. $w_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$, $k=0,1,2,3,4,5,6$, $z_1=w_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=w_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $(z_1-z_2)=|i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$, $z_1z_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$.

3.1508B Fie $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ şi ecuaţia $\bar{z}=z^n$. Fie m numărul soluţiilor ecuaţiei şi fie $S=z_1^m+z_2^m+\ldots+z_m^m$. Să se afle S. $z_1=0$ este soluţie. Dacă $z\neq 0$, $|z|=1\Rightarrow z^{n+1}=z\bar{z}=|z|^2=1$, deci numărul rădăcinilor distincte este $m=n+2$. $S=z_1^{n+2}+z_2^{n+2}+\ldots+z_{n+2}^{n+2}=0+z_2+z_3+\ldots+z_{n+2}=0=$ coeficientul lui z^n în ecuaţia $z^{n+1}-1=0$.

3.1509B Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$ şi $n\in\mathbf{N}$, $n\leq 10$ astfel ca $(x_1+1)^n+(x_2+1)^n=-1$, câte valori n există. $x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_1+1=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $x_2+1=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$, $(x_1+1)^n+(x_2+1)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}=2\cos\frac{n\pi}{3}=-1$. Evident avem valorile $n=2,4,8,10$ deci patru valori.

3.1510B Să se determine $z\in\mathbf{C}$ dacă $\bar{z}=z^5$. Procedăm ca în 3.1508B şi obţinem $z=0$, $z^6=1$, $z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$, $k=0,1,2,3,4,5$.

3.1511B Mulţimea punctelor din plan ale căror afixe satisfac relaţia $|z+|z||=|z-|z||:|x+\rho+iy|=|x-\rho+iy|$, $(x+\rho)^2+y^2=(x-\rho)^2+y^2\Rightarrow x\rho=0$ deci dreapta $x=0$ (punctul cu $\rho=0$, $(0,0)$ aparţine dreptei $x=0$.

3.1512B Fie $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ şi $z_1=1-\cos\theta-i\sin\theta$, $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$: $z_1=2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=-2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, $z_2=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ deci $\frac{z_1}{z_2}=-i\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$.

3.1513B Fie $z\in\mathbf{C}$ şi $|1+iz|=|1-iz|$. Atunci $z\in\mathbf{R}$. $|1+iz|=|1-y+ix|=\sqrt{(1-y)^2+x^2}=|1-iz|=|1+y-ix|=\sqrt{(1+y)^2+x^2}\Rightarrow -2y=2y$ deci $y=0$, $z\in\mathbf{R}$.

3.1514C Calculăm suma $S=\cos x+C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x$. Notăm $S'=\sin x+C_n^1\sin 2x+C_n^2\sin 3x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x$ şi luăm $S+iS'=(\cos x+i\sin x)+C_n^1(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+C_n^n(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x)=z+C_n^1z^2+C_n^2z^3+\ldots+C_n^nz^{n+1}=z(1+z)^n=(\cos x+i\sin x)(1+\cos x+i\sin x)^n=(\cos x+i\sin x)\left(2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^n=$

$(\cos x+i\sin x)2^n\cos^n\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{(n+2)x}{2}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{(n+2)x}{2}\right)\Rightarrow S=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{(n+2)x}{2}$.

3.1515C Mulţimea punctelor din plan al căror afixe z satisfac relaţia $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\pi$ $(0\leq\arg z<2\pi)$: $\arg(z-z_0)$ este unghiul dintre semiaxa Ox pozitivă şi semidreapta z_0z, $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\arg(z-1)-\arg(z+1)=\alpha$ deci punctele care verifică ultima relaţie descriu un arc capabil de unghiul α unghi cu laturile prin 1 şi -1. În cazul nostru $\alpha=\pi$ deci avem segmentul $(-1,1)$ de pe axa reală.

3.1516C Fie $z_k=\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k$, $k=1,2,3$ unde $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3=\frac{\pi}{3}$. Să se afle valoarea expresiei $E=\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3}$. $z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, $z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1z_2z_3=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$, $(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=\left[i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\left[i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]i\sqrt{3}=(-2-\sqrt{3})i\sqrt{3}$, $E=3+2\sqrt{3}$.

3.1517C Fie $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$ triunghiul în care z_1,z_2,z_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $z^3=1$ şi r raza cercului circumscris acestui triunghi. Se cere r. $w_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$, $w_0=z_1$, $w_1=z_2$, $w_2=z_3$, $|z_k|=1$ deci $r=1$.

3.1518C Fie $n\geq 3$, $n\in\mathbf{N}$, n impar şi $f=1+x+x^2+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}$, $g=1-x+x^2+\ldots+x^{n-3}-x^{n-2}+x^{n-1}$. Atunci $\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$. $f=\frac{x^n-1}{x-1}$, $g=\frac{(-x)^n-1}{-x-1}=\frac{x^n+1}{x+1}$, $fg=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$. Rădăcinile ecuaţiei $x^{2n}-1=0$ sunt $x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,2,\ldots,2n-1$. $x_0=1$, $x_n=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ şi alegem perechile de rădăcini complexe conjugate $x_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$, $x_{2n-k}=\cos\frac{(2n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{(2n-k)\pi}{n}=\cos\left(2\pi-\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{k\pi}{n}\right)=\cos\frac{k\pi}{n}-\sin\frac{k\pi}{n}=\bar{x}_k\Rightarrow fg=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2n-1})\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{2n-k})=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$.

3.1519C Să se determine $z\in\mathbf{C}$ astfel încât $z^2=-|z|:\rho^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=-\rho\Rightarrow\rho^2\cos^2\theta=-\rho$, $\rho^2\sin 2\theta=0$ deci $\rho=0$ sau $\rho=1$, $\sin 2\theta=0$, $\cos 2\theta<0$. Rezultă $2\theta=k\pi$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ deci $z\in\{0,i,-i\}$.

3.1520C Dacă $u,v\in\mathbf{C}$ şi $(u+v)^4=(\bar{u}+v)^4$, care afirmaţie este adevărată: a) $v=0$, b) $u,v\in\mathbf{R}$, c) $uv=0$, d) u sau $v\in\mathbf{R}$, e) $u=0$, f) $v\neq 0$. Prin verificare directă rezultă b), e) iar din $\left|\frac{u+v}{\bar{u}+v}\right|=1$ rezultă $(\mathrm{Im}u)(\mathrm{Im}v)=0$,

deci $u \in \mathbf{R}$.

3.1521C Care din numerele $-1 \pm i\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2, 1 + i\sqrt{2}$ nu este soluţie a ecuaţiei $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$. $(z^3 - 1)(z^3 - 2^3) = 0$ deci rădăcinile sunt: $1, 2, \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, -1, \pm i\sqrt{3}$. Numărul $1 + i\sqrt{2}$ nu este rădăcină.

3.1522C Se cere numărul m al elementelor mulţimii $A = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1$ şi $\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1\}$. $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $\left|\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)-\sin(-\theta)} + \frac{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\right| = |\cos 2\theta + i\sin 2\theta + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)| = |2\cos 2\theta| = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \pm\frac{1}{2}$, $2\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$, $m = 8$.

3.1523C Să se arate că $z \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \Rightarrow w = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbf{R}$. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\frac{|z|}{z} = \frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \Rightarrow w = 2\cos\theta \in \mathbf{R}$.

3.7 Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie

3.1524A Cât este latura a în triunghiul ABC unde $\hat{A} = 45°$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 2 + 1 - 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, $a = 1$.

3.1525A Aria triunghiului ABC cu $\hat{A} = 30°$, $b = 4$, $c = 2$. $S = \frac{bc\sin\hat{A}}{2} = \frac{4\cdot 2}{4} = 2$.

3.1526A Aria triunghiului ABC cu $\hat{A} = 60°$, $B = 45°$, $c = 2$. Rezultă $\hat{C} = 75°$. $\frac{c}{\sin c} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{c\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}} \Rightarrow S = \frac{c^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}}{2\sin\hat{C}} = \frac{4\sin 60°\sin 45°}{2\sin 75°} = 3 - \sqrt{3}$.

3.1527A Aria paralelogramului de laturi $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ şi unghi între diagonale de 45°. Notăm lungimile diagonalelor $2d_1, 2d_2$ şi obţinem $S = 4 \cdot \frac{d_1 d_2 \sin 45°}{2} = d_1 d_2\sqrt{2}$, $a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3} \Rightarrow 2d_1d_2\sqrt{2} = b^2 - a^2 = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$.

3.1528A În triunghiul ABC cu $a = 1$ şi $R = 1$ ($R-$ raza cercului circumscris) se cere $\hat{A} \cdot \frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$, $\sin\hat{A} = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}$, $\hat{A} = 30°$.

3.1529A Cât este unghiul $\hat{A}$ în triunghiul ABC dacă $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$? $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{7}{8}$, $A = \arccos\frac{7}{8}$ $\left(\frac{7}{8} = \frac{21}{24}\right)$.

3.1530A Aria rombului de latură 1 format din două triunghiuri echilaterale este $S = 2 \cdot \frac{1\cdot 1\sin 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1531A dacă unghiurile unui triunghi sunt proporţionale cu numerele 1, 2, $\sqrt{3}$, atunci triunghiul este oarecare: $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3+\sqrt{3}}$, $B = \frac{2\pi}{3+\sqrt{3}}$, $C = \frac{\pi\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

3.1532A Unghiul format de tangentele de lungime 3 duse dintr-un punct la un cerc este 60°. Atunci raza r a cercului este $\sqrt{3}$: ecuaţia care dă raza este $(2r)^2 - r^2 = 3^2$, $r = \sqrt{3}$.

3.1533A Unul din unghiurile unui trapez isoscel de înălţime $\sqrt{2}$ este 45°. Se cere suma S a laturilor neparalele: $S = 2b = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\cos 45°} = 4$.

3.1534A Într-un triunghi ABC se dau $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 30°$. Cât este $\sin\frac{\hat{A}}{2}$. $a = 180° - 60° - 30° = 90°$, $\frac{A}{2} = 45°$. $\sin\frac{\hat{A}}{2} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.1535A Într-un triunghi ABC se dau $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 15°$ şi $AB = 2$. Se cere $b = AC$. $b = AB\text{tg}15° = 2\frac{\sin 15°}{\cos 15°} = 2\sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2(2 - \sqrt{3})$.

3.1536A Un triunghi ABC pentru care $\sin\frac{\hat{C}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 45°$, $\hat{C} = 90°$.

3.1537A Mediana AM ($M \in BC$) a unui triunghi ABC face unghiuri de 30° cu laturile adiacente AB şi AC. Rezultă că mediana este şi bisectoare, deci triunghiul este isoscel cu $\hat{B} = \hat{C} = 60°$ deci este şi echilateral.

3.1538A Înălţimea din A a unui triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$) împarte ipotenuza în raportul 1/2. Atunci tangenta unghiului minim al triunghiului este $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Notăm A' piciorul înălţimii din A, $A'B = m$, $A'C = 2m$, $A'A^2 = m \cdot 2m$, $A'A = \sqrt{2}m$, $\text{tg}\alpha = \frac{A'A}{A'C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.1539A Fie ABC un trunchi cu $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{8}$, $AB = AC = 1$. Cât este înălţimea BB'? $BC^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2 + \sqrt{2}$, $B'B = BC\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

3.1540A Se cere raza R a cercului circumscris triunghiului ABC cu $a = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{6}$. Avem $A = \frac{7\pi}{12}$, $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}}{2\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2} = 1$.

3.1541A Într-un triunghi ABC se dau $AB = \sqrt{13}$, $BC = 3$, $\hat{C} = 60°$ şi se cere AC. Avem $\frac{c}{\sin 60} = 2R$, $\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$, $R = \sqrt{\frac{13}{3}}$, $\frac{a}{\sin A} = 2\sqrt{\frac{13}{3}} \Rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$, $\cos A = \sqrt{1 - \frac{27}{52}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$, $\sin B = \sin(60 + A) = \sin 60°\cos A + \sin A\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{13}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}}$, $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow b = AC = 4$.

3.1542A În orice triunghi ABC are loc identitatea $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = k\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C$. Cât este k. Avem $\text{tg}(B + C) = -\text{tg}C$, $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}(A + B)[1 - \text{tg}A\text{tg}B] + \text{tg}C = -\text{tg}C + \text{tg}A \cdot \text{tg}B\text{tg}C + \text{tg}C$ deci $k = 1$.

3.1543A Fie un triunghi în care are egalitatea $\sin A = \sin B + \sin C$. Relaţia $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$ deci $a = b + c$, nu există un astfel de triunghi.

3.1544A Triunghiul ABC în care are loc egalitatea $\sin C = \cos A + \cos B$ este dreptunghic în A sau B: $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

dar $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}\Rightarrow \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right]=0$,
$\sin\frac{C}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{A+C-B}{4}\sin\frac{A-B-C}{4}\right)=0\Rightarrow A+C-B=0$ sau $A-B-C=0$ de unde $B=\frac{\pi}{2}$ sau $A=\frac{\pi}{2}$.

3.1545A Se dă ABC triunghi dreptunghic cu $a=8$, $r=1$ (r-raza cercului înscris) şi se cere $E=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$. Se ştie că $S=pr$, $b+c-2r=a$, deci $E=\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{a^2}{2S}=\frac{a^2}{2pr}=\frac{a^2}{(a+b+c)r}=\frac{a^2}{2(a+r)r}=\frac{64}{2\cdot 9}=\frac{32}{9}$.

3.1546B În triunghiul ABC cu laturile $a=2, c=\sqrt{2}, b=1+\sqrt{3}$ se cere $\hat{A}$. $\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2-4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$.

3.1547B Să se determine unghiul ascuţit α al unui romb dacă aria cercului înscris este egală cu o treime din aria rombului. Rezultă $S=2lr=3\pi r^2=4l\sin\frac{\alpha}{2}l\cos\frac{\alpha}{2}=2l^2\sin\alpha$ (l = latura rombului) $\Rightarrow \sin\alpha=\frac{r}{l}=\frac{2}{3\pi}$.

3.1548B Într-un triunghi oarecare să se calculeze în funcţie de a,b,c expresia $E=a(b\cos C-c\cos B)$. Din teorema cosinusului rezultă $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$, $2ac\cos B=a^2+c^2-B^2$ deci $E=b^2-c^2$.

3.1549A În tetraedrul $ABCD$ cu $AB=CB=\sqrt{5}$, $\angle CAB=\angle ABC=\angle ABD=90°$, $\angle ACB=45°$, $\angle ADB=30°$, se cere $d=d(A,CD)$. Avem $AC=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$, $AD=2\sqrt{3}$, $CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=\sqrt{6+12}=3\sqrt{2}$, $d\cdot CD=AC\cdot AD$, $d\cdot 3\sqrt{2}=\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}\Rightarrow d=2$.

3.1550A Ce valori pot lua p,q dacă $\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}=\frac{\pi}{2}$, deci $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$; evident $p=q=4$, $p=3$, $q=6$ şi$p=6$, $q=3$ (avem $q=2+\frac{4}{p-2}$, $p-2=1$, $p-2=2$, $p-2=4$).

3.1551B Triunghiul ABC cu $a=2$, $A=\frac{\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{4}$ are aria $S=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$.
Avem $C=\frac{5\pi}{12}$, $S=\frac{ac\sin C}{2}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$, $\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $S=\frac{2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$.

3.1552B Într-un triunghi ABC cu $b=3$, $c=2$, $B+C=\frac{\pi}{3}$ avem $\operatorname{tg}(B-C)=\frac{5\sqrt{3}}{37}:\frac{b}{\sin B}=\frac{C}{\sin C}=\frac{b+C}{\sin B\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}\Rightarrow\frac{5}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$, $\frac{5}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\frac{B-C}{2}}$, $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{1}{5\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}(B-C)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{B-C}{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{37}$.

3.1553B În ΔABC cu $A=90°$ şi b,c catetele, lungimea bisectoarei l_a este $l_a=\frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$: avem formula $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

3.1554B Dacă în ΔABC avem relaţia $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0$ atunci ΔABC este isoscel: relaţia se scrie $2\sin\frac{A-C}{2}\left(\cos\frac{C-A}{2}-\cos\frac{A+C-2B}{2}\right)=0$, $4\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{B-A}{2}=0$ deci $A=C$ sau $A=B$ sau $B=C$.

3.1555B Un triunghi ABC în care $a=\frac{7}{3}c$, $b=\frac{8}{3}c$ avem $A=60°$: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2+1}{\frac{16}{3}}=\frac{1}{2}$.

3.1556B În interiorul triunghiului ABC cu $\hat{A}=90°$, $\hat{B}=30°$ se construiesc pătratele $BMNC$, $CPQA$, $ARSB$. Se cere raportul R dintre aria hexagonului $MNPQRS$ şi aria triunghiului ABC. Notăm $BC=2a$, $\hat{\gamma}=\widehat{PCN}=120°$, $\hat{\beta}\widehat{MBS}=150°$. Avem $\sin\hat{\beta}=\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin\hat{\gamma}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $S_{MNPQRS}=4a^2+a^2+3a^2+2\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{a\cdot 2a\sin\gamma}{2}+\frac{a\sqrt{3}\cdot 2a\sin\beta}{2}=a^2(8+2\sqrt{3})$, $k=4+\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

3.1557B Într-o piramidă triunghiulară regulată unghiul diedru dintre o faţă laterală şi bază este α iar dintre două feţe laterale, β. Atunci $3\cos^2\alpha+2\cos\beta=1$. Notăm latura bazei cu a, muchia laterală cu b, înălţimea bazei cu h, apotema unei feţe cu l şi altă înălţime cu m (a unei feţe laterale). Avem $l^2=b^2-\frac{a^2}{4}$, $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $l\cdot a=b\cdot m\Rightarrow m=\frac{a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}}{b}$, $\cos\beta=\frac{2m^2-a^2}{2m^2}=\frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$, $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 3\cdot l}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{3}\frac{a^2}{4b^2-a^2}$ deci $3\cos^2\alpha+2\cos\beta=\frac{a^2}{4b^2-a^2}+\frac{4b^2-2a^2}{4b^2-a^2}=1$.

3.1558B Dacă în ΔABC se cunosc $BC=2$, $AC=\sqrt{6}$ şi $R=12\sqrt{138}/15$, atunci AB şi aria S sunt date de $AB=\frac{3}{2}$, $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\sin A=\frac{a}{2R}=15/12\sqrt{118}$, $\sin B=\frac{6}{2R}=\frac{15\sqrt{6}}{24\sqrt{118}}$, $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$, $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}$, $AB=c=2R\sin C$, $S=\frac{ab\sin c}{2}$.

3.1559B Se cer laturile a,b,c ale unui triunghi în care avem $2p=a+b+c=24$ şi $\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{5}=k:\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{24}{12K}=\frac{2}{K}\Rightarrow\frac{a}{3K}=\frac{2}{K}$, $a=6$, $\frac{b}{4K}=\frac{2}{K}$, $b=8$, $\frac{c}{5K}=\frac{2}{K}$, $c=10$, deci $\{6,8,10\}$.

3.1560B Dacă în ΔABC avem $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$ atunci $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.
Avem $\sin\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

3.1561B Tangenta comună exterioară T_1T_2 la două cercuri tangente exterior în A de raze r_1,r_2 este $T_1T_2=2\sqrt{r_1r_2}$ iar $AC=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ (C proiecţia lui A pe T_1T). Dacă B este un punct pe perpendiculara în A pe planul α al cercurilor şi $BA=l$, $d=BC=\sqrt{BA^2+AC^2}$, $\frac{l}{d}=\frac{4}{5}$ atunci $d=\sqrt{l^2+\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)^2}\Rightarrow d^2=\frac{16}{25}d^2+\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)^2$, $d=\frac{10r_1r_2}{3(r_1+r_2)}$.

3.1562B Afixul z al lui C în triunghiul echilateral ABC unde A, B au afixele $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$ este $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sau $\frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$: $d((x,y),(1,0)) = d((x,y),(2,1)) = d((1,0),(2,1)) = \sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$ deci $x + y = 2$, $2x^2 - 6x + 3 = 0$, $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$.

3.1563B Trounghiul ABC în care are loc relaţia $\sin B = \sin C$ este isoscel cu $B = C$: B şi C sunt egale sau suplementare; altfel: $2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 0$, $\sin\frac{B-C}{2} = 0$ sau $\cos\frac{B+C}{2}$ deci $B = C$ sau $B + C = \pi$, fals.

3.1564B Triunghiul ABC cu $AB = BC$ şi mediana $AD \perp CE$, CE bisectoare, $AD = m$ are $\hat{C} = \arccos\frac{1}{4}$: dacă $E = AD \cap CE$, $AE = x$, $ED = y$ avem $\frac{x}{y} = \frac{a}{\frac{b}{2}} = \frac{2a}{b}$, $x + y = m$, $4m^2 = 2a^2 + b^2$, $x = \frac{2am}{b+2a}$, $\sin\frac{C}{2} = \frac{x}{a} = \frac{2m}{b+2a}$, $2\sin^2\frac{C}{2} = 1 - \cos C$, $\cos C = \frac{a}{2b}$ deci notând $x = \cos C$, $2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{8m^2}{(b+2a)^2} = \frac{2(2a^2+b^2)}{(b+2a)^2} = \frac{2(8x^2+1)}{(1+4x)^2} = 1 - x$, $16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$ ci soluţia $x = \frac{1}{4}$ deci $\hat{C} = \arccos\frac{1}{4}$.

3.1565B În ΔABC cu $AB = c = 3$, $AC = b = 2$ şi $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$, lungimea medianei $AM = m_a$ este $\frac{\sqrt{7}}{2}$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = 4 + 9 + 6 = 19$, $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{13}{2} - \frac{19}{4} = \frac{7}{4}$, $m_a = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

3.1566C Un romb $ABCD$ cu $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ şi aria $S = 4$ are raza r a cercului înscris $r = \sqrt[4]{2}$. Notăm diagonalele cu d_1, d_2 şi latura l: $d_1^2 = l^2 + l^2 - 2l \cdot l\cos\frac{\pi}{4} = l^2(2 - \sqrt{2})$, $d_2^2 = l^2(2 + \sqrt{2})$, $l = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, $S = l \cdot 2r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{l} = \sqrt[4]{2}$.

3.1567C Dacă în ΔABC avem $b = 3$, $c = 2$, $\hat{C} = \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ atunci $\alpha \in \left(0, \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \Leftrightarrow a^2 - 6a\cos\alpha + 5 = 0$ cu $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2\alpha \geq \frac{5}{9}$, deci $\cos\alpha > \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha \in \left(0, \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

3.1568C În ΔABC cu laturile a, b, c verificând egalităţile $5a^2 = 5b^2 + c^2$, $3b^2 = 3c^2 + a^2$ avem $\text{tg} = 3$: $16a^2 = 18b^2$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\text{tg}A = 3$.

3.1569C Dacă în ΔABC avem $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, $A > B > C$ atunci $A = 90°$: $1 - \cos^2 A + \frac{1-\cos^2 B}{2} + \frac{1-\cos^2 C}{2} = 2 \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos(B + C)\cos(B - C) = 0 \Leftrightarrow \cos A(-\cos A + \cos(B - C)) = 0$, $\cos A = 0$ sau $\cos(B - C) = \cos A$ deci $A = \frac{\pi}{2}$ sau $B = \frac{\pi}{2}$ (respectiv $C = \frac{\pi}{2}$).

3.1570C Dacă în ΔABC, laturile a, b, c sunt în progresie aritmetică, $2a = b + c$ atunci $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{3}{5}$: evident $2\sin A = \sin B + \sin C$ (teorema sinusului), $\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 4\cos\frac{B+C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}$ deci $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$, $5\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 3\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{3}{5}$.

3.1571C Semidreptele Ox, Oy, Oz ale unui triedru tridreptunghic formează unghiurile α, β, γ cu un plan π ce intersectează aceste drepte în A, B, C. Atunci $\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta + \text{tg}^2\gamma = 1$. Notăm $OA = a$, $OB = b$, $Oc = c$ şi h înălţimea tetraedrului din O pe π. Atunci $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2 A + \text{tg}^2 B + \text{tg}^2 C = 1$.

3.1572C Perimetrul P al triunghiului ortic $A'B'C'$ al triunghiului ABC este dat de $P = 2p = a' + b' + c' = a\cos A + B\cos B + c\cos C$: $C'A = b\cos A$, $B'A = c\cos A$, $(a')' = (C'B')^2 = C'A^2 + B'A^2 - 2C'A \cdot B'A\cos A = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A) \Rightarrow a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$.

3.1573C Unghiul C al triunghiului ABC pentru care $\cos A + \cos B = \cos(A + B) + \frac{3}{2}$ este $c = 60°$. Notăm $x = \cos\frac{A+B}{2}$ şi relaţia devine $4x^2 - 4x\cos\frac{A_b}{2} + 1 = 0$ cu $\Delta = \cos^2\frac{A-B}{2} - 1 \geq 0$ deci $\cos^2\frac{A-B}{2} = 1$, $A - B = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $A = B = 60°$, $C = 60°$.

3.1574C Triunghiul ABC în care are loc relaţia $\frac{a+c}{b} = \text{ctg}\frac{B}{2}$ este dreptunghic: $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \Rightarrow 2\cos^2\frac{B}{2} = \sin A + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-C}{2} \Rightarrow 2\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A-C}{2}\right) = 0$, $\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A+C}{2} = 0$, $C = A + B$, $A = B + C$ deci este dreptunghic în A sau C.

3.1575C În triunghiul ABC, $B > \frac{\pi}{2}$, $0 < C < \frac{\pi}{4}$ şi $b = 2c$. Atunci $A < 2C$: $2\sin C = \sin B \leq 1 \Rightarrow C < \frac{\pi}{6}$ deci $2C \leq \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. Rezultă $B > \frac{\pi}{2}$ şi $A < \frac{\pi}{2}$, $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B = 2\sin C\cos C - \sin C\sqrt{1 - 4\sin^2 C} < 2\sin C\cos C = \sin 2C$, deci $\sin A < \sin 2C$; dar $A < \frac{\pi}{2}$, $2C < \frac{\pi}{2}$ deci $A < 2C$.

3.1576C Fie punctele A, B, C o dreaptă $d \notin (ABC)$, $M \in d$, M mobil, E, F, P, Q mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CM], [MA]$. Atunci locul geometric al punctului $N = EP \cap QF$ este o paralelă la d. Deoarece C şi E sunt puncte fixe, P şi Q descriu drepte paralele cu d, $P \in \delta$ iar N fiind mijlocul lui EP ($QPFE$ este paralelogram), N descriu tot o dreaptă paralelă cu δ deci cu d.

3.1577C Dacă A', B', C' sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris (de rază r) în triunghiul oarecare ABC cu laturile acestuia, atunci raportul $k = \frac{\sigma(A'B'C')}{\sigma(ABC)} = \frac{r}{2R}$. $\sigma(A'B'C') = S' = \frac{r^2}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a+b+c}{2R}\right) = \frac{r^2 p}{2R} = \frac{r \cdot S}{2R}$ $(S = \sigma(ABC))$, $\frac{S'}{S} = \frac{r}{2R}$.

3.1578C Într-un triunghi dreptunghic avem $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C$ deoarece $\text{tg}C = -\text{tg}(A + B) = -\frac{\text{tg}A + \text{tg}B}{1 - \text{tg}A\text{tg}B}$.

3.1579C Triunghiul ABC pentru are $\sin^2 A = \sin 2B\sin 2C$ este isoscel cu $B = C$: $\sin^2 A = \sin^2(B + C) = \frac{1-\cos 2(B+C)}{2} = \frac{1}{2}[\cos 2(B - C) - \cos(B + C)] \Rightarrow cos2(B - C) = 1$, $B = C$.

3.8 Drepte şi plane în spaţiu

3.1580A Fie π un plan, $d \subset \pi$ o dreaptă, A, A', A'' puncte astfel ca $A \notin \pi$, $A' \in \pi$, $AA' \perp \pi$, $A' \notin d$, $A'' \in d$, $A'A'' \perp d$. Atunci $AA'' \perp d$. Rezultă din teorema celor trei perpendiculare sau direct, $AA' \perp \pi \Rightarrow AA' \perp d$, deci $d \perp (AA'A'')$ adică $d \perp AA''$.

3.1581A Lungimea segmentului BC, unde B şi C sunt propiecţiile punctului A pe planul π respectiv pe dreapta $d \subset \pi$ iar $AB = 2$, $AC = 3$ este $l = \sqrt{5}$: triunghiul ABC este dreptunghic în B pentru orice punct $C \in \pi$ (nu numai pentru proiecţia lui A pe d), deci $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5}$.

3.1582A Înălţimea h a unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala $d = 4$ şi laturile bazei $a = 2$, $b = 3$ este $h = \sqrt{3}$: $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$.

3.1583A Muchia l a tetraedrului regulat cu înălţimea $h = \sqrt{2}$ este $l = \sqrt{3}$: dacă R este raza cercului circumscris unei feţe, atunci $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$, $l = R\sqrt{3}$, $h^2 + R^2 = l^2$, $l = \sqrt{3}$.

3.1584A Prin secţionarea unui cub cu un plan mediator al unei diagonale de faţă (şi care evident conţine cealaltă diagonală a feţei) se obţine un dreptunghi cu laturile l şi $l\sqrt{2}$ (l = latura cubului).

3.1585A Muchiile unui triedru dreptunghic în O sunt secţionate în A, B, C de un plan π şi $OA = 2$, $OB = 3$, $OC = 4$. Se cere distanţa $d(0, \pi)$. Scriem volumul în două feluri: $V = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6} = \frac{1}{3}(S_{ABC} \cdot d)$, sau calculăm înălţimea din O în triunghiul COM, $OM \perp AC$. $OM = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $CM = \sqrt{OC^2 + OM^2} = \sqrt{16 + \frac{36}{13}} = 2\sqrt{\frac{61}{13}}$, $d \cdot CM = OC \cdot OM$, $d = 4 \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} \sqrt{\frac{13}{61}} \frac{1}{2} = \frac{12}{\sqrt{61}}$.

3.1586A Înălţimea unui trapez este perpendiculară pe un plan π. Atunci proiecţia trapezului pe planul π este un segment de dreaptă deoarece planul trapezului este perpendicular pe π.

3.1587A Proiecţia unui romb situat în planul α, pe un plan π este tot un romb dacă unghiul între α şi π este 45° deoarece proiecţiile pe un plan a două drepte paralele sunt drepte paralele rezultă întâi că proiecţia rombului este un paralelogram. Considerând proiecţiile a trei vârfuri ale rombului atât pe planul π cât şi pe dreapta $d = \alpha \cap \pi$ comună planelor α şi π se poate arăta că două laturi alăturate ale rombului se proiectează după segmente egale (apar triunghiuri dreptunghice isoscele).

3.1588A Distanţa l de la un vârf al prismei triunghiulare regulate la muchia opusă (diagonala unei feţe laterale este $d = 5$ iar latura bazei $a = 4$) este

$l = \sqrt{21}$. Notăm înălţimea prismei cu h şi obţinem $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21}$.

3.1589A Distanţa d de la centrul O al unei sfere S de rază R la centrul O' al unui cerc $\Gamma = S \cap \pi$ de rază r (Γ = intersecţia sferei S cu un plan π) este evident $d = \sqrt{R^2 - r^2}$.

3.1590A Intersecţia unui plan ce conţine o latură a bazei unei piramide patrulatere regulate şi mijlocul unei muchii laterale ce nu intersectează această latură, cu piramida, este un trapez isoscel cu bazele a, $\frac{a}{2}$ şi laturile neparalele egale cu medianele feţelor laterale (a = latura bazei).

3.1591A O dreaptă d face cu planul π un unghi ascuţit, $\{A\} = d \cap \pi$. Se cere locul geometric al punctelor $B \in \pi$ cu proprietatea $BA \perp D$. Este o dreaptă $d_1 \subset \pi$, $d_1 \perp d$, $d_1 = \pi \cap \pi'$, $\pi' \perp d$ în A.

3.1592A Dacă secţiunea axială a unui cilindru este un pătrat de diagonală a deci de latură $\frac{a}{\sqrt{2}}$ atunci latura pătratului înscris în cercul unei baze este $l = \frac{a}{2}$ deoarece diagonala sa d' este latura primului pătrat, $d' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, deci $2l^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, $l = \frac{a}{2}$.

3.1593A Un plan intersectează un con după mulţimea de puncte $M \neq \emptyset$ fără a intersecta cercul bazei conului, M fiind un punct (când planul trece numai prin vârf), un cerc, când planul este paralel cu baza sau o elipsă.

3.1594A Dacă secţiunea axială care trece prin două muchii laterale ale unei piramide hexanale regulate este un triunghi echilateal de latură a, atunci apotema bazei piramidei este $l = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ deoarece latura bazei este $\frac{a}{2}$ şi $l = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

3.1595A Secţiunea unui con cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălţimii de lungime a (conul are secţiunea axială triunghi echilateral) este un cerc de rază $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Generatoarea conului este dată de $a = G\frac{\sqrt{3}}{2}$, $G = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, raza bazei conului este $R = \frac{G}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ deci $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

3.1596A În piramida patrulateră $VABCD$, MN linie mijlocie în triunghiul ABC, ($M \in (AB)$, $N \in BC$), P mijlocul muchiei VD, secţiunea determinată de planul (MNP) este un pentagon. Planul (MNP) taie muchiile VA şi VC în Q respectiv R, $PQMNR$ este pentagon.

3.1597A Dreptele necoplanare d_1, d_2, d_3 se intersectează două câte două în punctele A, B, C. Atunci A, B, C coincid. Se poate arăta ca n drepte $d_1, d_2, \ldots, d_n$ care se intersectează două câte două în punctele $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $m > n$ (dacă $n > 3$) ori sunt toate coplanare (dacă oricare trei puncte A_i, $i = \overline{1, m}$ cu coincid) ori toate au un punct comun $O = A_1 = A_2 = \ldots = A_m$

dacă oricare trei din dreptele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ nu sunt coplanare.

3.1598A Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de două drepte coplanare neconfundate este o pereche de plane, când dreptele sunt concurente (plane perpendiculare pe planul dreptelor şi pe care îl intersectează după cele două bisectoare) sau un plan (când dreptele sunt paralele) care intersectează planul dreptelor după o dreaptă egal depărtată de cele două drepte.

3.1599A Patru puncte necoplanare A, B, C, D determină patru plane (ABC), $(ABD), (ACD), (BCD)$.

3.1600A În planele paralele între ele P_1, P_2, P_3 se iau punctele $A, B \in P_1$, $C, D \in P_2$ astfel ca A, B, C, D să fie necoplanare. Dreptele AC, BC, BD, AD taie planul P_3 în punctele M, N, P, Q. Atunci M, N, P, Q formează un paralelogram, deoarece un plan taie alte două plane paralele după drepte paralele, deci planele (ABC) şi (ABD) taie P_3 după dreptele NM şi PQ paralele cu AB iar (BCD) şi (ACD) după dreptele NP şi MQ paralele cu CD.

3.1601A Patru puncte din care trei sunt coliniare, sunt coplanare.

3.1602A Fie (P) un plan şi O un punct fix în acest plan. Care este locul geometric al punctelor M din spaţiu care au proprietatea că distanţa de la M la (P) este o constantă dată $a > 0$ iar unghiul pe care îl face OM cu (P) este altă constantă $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Locul geometric este format din două cercuri obţinute prin intersecţia unui con cu vârful în O cu două plane π_1, π_2 paralele cu (P) la distanţa a de (P).

3.1603A În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu toate muchiile egale cu l, α este unghiul dintre VA şi BC iar β unghiul intre VB şi VD. Se cere $a = \cos(\alpha + \beta)$: α este unghiul dintre VA şi AD deci $\alpha = \frac{\pi}{3}$ iar $\beta = \frac{\pi}{2}$ (triunghiul BVD este dreptunghic, $a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1604A Un pătrat are o latură conţinută într-un plan (π) iar diagonalele sale formează cu (π) unghiuri de 30°. Se cere măsura α a unghiului diedru format de (π) cu planul pătratului. Fie $ABCD$ pătratul de latură a cu $AB \in (\pi)$ şi C' proiecţia lui C pe (π). Evident $C'C = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ iar măsura unghiului diedru este chiar $\alpha = \angle CBC'$ deci $\sin\alpha = \frac{C'C}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45°$.

3.1605A În cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, planele AB_1D_1 şi C_1BD sunt paralele, conţin perechi de drepte din cele două plane paralele: $AD_1 || BC_1$ şi $AB_1 || DC$.

3.1606A În cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de latură a, N şi P sunt mijloacele lui AA_1 respectiv BC şi se cere distanţa d de la B la planul ANB. Distanţa d este de fapt egală cu înălţimea BB' în ΔABP, deci $d = \frac{AB \cdot BP}{AP} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

3.1607A Latura neparalelă CD a trapezului dreptunghic $ABCD$ este situată în planul α iar punctele A şi B nu aparţin lui α. Calculaţi DE, unde

E este punctul în care dreapta AB intersectează planul α, dacă $AB = 5$, $BC = 3$, $CD = 4$, $AD = 6$. Problema de fapt este de geometrie plană, $E = (CD) \cap (BA)$, CB este linie mijlocie în triunghiul DEA, deci $DE = 2DC = 2 \cdot 4 = 8$.

3.1608A Într-un plan π se consideră un trapez $ABCD$ cu $AB = 4$, $AD = 6$, $BC = 2$, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABC}) = 90$. Prin CD se duce un plan care intersectează în M şi N perpendicularele duse în A şi B la planul π astfel încât $AM + BN = 6$. Să se determine MN. R. Triunghiurile NBC şi MAD sunt dreptunghi asemenea, $\frac{AM}{BN} = \frac{AD}{BC} = 3 \Rightarrow AM = 3BN$, $4BN = 6$, $BN = \frac{3}{2}$, $AM = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, $MN = \sqrt{AB^2 + (AM - BN)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = 5$.

3.1609A Dacă A, B, C, D sunt patru puncte necoliniare, câte dintre segmentele $(AB), (AD), (AC), (BC), (BD), (CD)$ pot fi intersectate de un plan care nu trece prin nici un punct A, B, C, D ?. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ ($(AB), (AC), M, N$ alese arbitrar) şi π un plan prin MN. π nu intersectează BC, dar poate intersecta sau pe (AD) (deci cel puţin trei) sau pe $(CD), (BD)$, deci cel mult patru.

3.1610A Dacă d_1, d_2 sunt două drepte şi π_2 un plan astfel că $d_2 \subset \pi_2$, $d_1 \perp \pi_2$ atunci $d_1 \perp d_2$, deoarece d_1 este perpendiculară pe orice dreaptă din π_2 şi pe d_2.

3.1611A Dacă $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată de vârf A şi O centrul de greutate al ΔABC, atunci $VO \perp AB$ deoarece $VO \perp (ABC)$ deci pe orice dreaptă din (ABC), deci şi pe AB (Ducând proiecţia O a lui V pe (ABC) din egalitatea triunghiurilor VOB, VOC, VOA rezultă că O este centrul cercului circumscris lui ΔABC, deci centrul de greutate).

3.1612A Dacă α este un plan, d o dreaptă, $d || \alpha$, $A \in d$ şi $B \in \alpha$, locul geometric al mijlocului M al segmentului AB când A şi B parcurg dreapta d respectiv planul α este un plan paralel cu α. Se foloseşte linia mijlocie într-un triunghi; fixăm întâi $A \in d$, atunci M parcurge un plan, apoi A parcurge d.

3.1613A Două plane perpendiculare p_1, p_2 se taie după o dreaptă d. Fie $A \in p_1$, $B \in p_2$ iar A', B' picioarele perpendicularelor duse din A respectiv B pe d. Dacă $AA' = 3$ cm, $BB' = 4$ cm, $A'B' = 12$ cm atunci $AB = 13$ cm; AB este o diagonală a unui paralelipiped dreptunghic în care AA', BB' şi $A'B'$ sunt laturile deci $AB = \sqrt{(AA')^2 + (BB')^2 + (A'B')^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$.

3.1614A Planele duse prin mijloacele coardelor unui cerc, perpendiculare pe aceste coarde (planele mediatoare ale coardelor) au o dreaptă comună, perpendiculara în centrul cercului pe planul cercului.

3.1615A În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AD || BC$, $AB \perp BC$) cu $AD = u$,

$BC = 2u$ şi aria $2u^2\sqrt{3}$ se duce în D perpendiculara pe planul trapezului pe care se ia un punct M astfel încât $MD = u$. Se cere produsul distanţelor de la M la AB şi BC. R. Dacă $DD' \perp BC$, $D' \in (BC)$ avem $d(M,AB) = MA = u\sqrt{2}$, $d(M,BC) = \sqrt{u^2 + D'D^2}$, $D'D = AB$, $2u^2\sqrt{3} = \frac{(u+2u)AB}{2}$, $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}u$, $d(M,BC) = u\sqrt{\frac{19}{3}}$, $P = d(M,AB)\cdot d(M,BC) = u\sqrt{2}\cdot u\sqrt{\frac{19}{3}} = u^2\sqrt{\frac{38}{3}}$.

3.1616A Distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală a unei piramide patrulatere regulate care are înălţimea 12 şi latura bazei 10 este $d = \frac{5\cdot 12}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{60}{13}$.

3.1617A Mulţimea punctelor egal depărtate de două plane paralele distincte este un plan paralel cu cele două şi la distanţă egală faţă de ele.

3.1618A Dintr-un punct A la distanţa a de un plan π se duc două oblice AB şi AC care fac cu π unghiuri de 45° respectiv 30° iar între ele un unghi drept. Cât este BC ? $\frac{a}{AB} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a}{AC} = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$.

3.1619A Lungimea segmentului ce uneşte mijloacele a două muchii opuse (bimediană) ale unui tetraedru regulat de muchie m este $l = \frac{m}{\sqrt{2}}$. Dacă h este înălţimea unei feţe, $h = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, atunci $l = \sqrt{h^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3m^2}{4} - \frac{m^2}{4}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

3.1620B Locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane π_1, π_2 care au o dreaptă comună $d = \pi_1 \cap \pi_2$ este format din două plane perpendiculare care conţin pe d, planele bisectoare a celor patru diedre, câte două opuse la "vârf" şi suplementare câte două.

3.1621B Trei drepte în spaţiu nu se intersectează două câte două. Atunci acestea: a) sunt coplanare; b) sunt paralele; c) sunt confundate; d) sunt necoplanare; e) sunt neparalele; f) nici unul dintre răspunsurile anterioare nu este corect. R. c) este evident fals, celelalte pot fi adevărate sau false în cazuri particulare, deci în general sunt false.

3.1622B Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei drepte neconcurente dar care se intersectează două câte două este format din patru drepte, perpendiculare pe planul celor trei drepte (care sunt evident coplanare) în centrele cercurilor circumscris respectiv exânscrise triunghiului determinat de cele trei drepte.

3.1623B Într-un plan α sunt date punctele distincte $M_1, M_2.M_3, M_4, M_5$ şi în afara lui punctul M. Care este cel mai mare număr de drepte care pot trece prin cel puţin două dintre aceste puncte ? Drepte sunt în număr de $5+4+3+2+1 = 15$ sau $5+C_5^2 = 15$: $MM_1, MM_2, MM_3, MM_4, MM_5, M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5, M_2M_3, M_2M_4, M_2M_5, M_3M_4, M_3M_5, M_4M_5$.

3.1624B Dacă cinci puncte sunt astfel încât oricare trei nu sunt coliniare şi oricare patru nu sunt coplanare, atunci numărul de plane care să conţină trei din aceste puncte este $C_5^3 = 10$.

3.1625B Se dă un triunghi ABC, $O \notin (ABC)$, M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB. Atunci planele AMO, BNO, CPO şi ABC se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului ABC, primele trei au comună mediana OG a tetraedrului $OABC$.

3.1626B Pe planul unui paralelogram $ABCD$ se ridică perpendicularele $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $DD' = d$. Pentru ca punctele $A'B'C'D'$ să fie coplanare, trebuie satisfăcută egalitatea $a + c = b + d$: dacă OO' este perpendiculara ridicată în centrul O al paralelogramului, condiţia ca $A'B'C'D'$ să fie coplanare revine la faptul că OO' este linie mijlocie în ambele trapeze dreptunghice $AA'C'C$, $BB'D'C$, de unde $2OO' = a + c = b + d$.

3.1627B Aria S a patrulaterului $MNPQ$, unde M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor $[AB], [BC], [CD], [AD]$ ale tetraedrului $ABCD$ în care $BD = a$, $AC = b$ şi măsura unghiului dintre BD, AC este α este $S = \frac{ab\sin\alpha}{4}$: $MNPQ$ este evident un paralelogram cu laturile $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ şi unghiul dintre ele α, deci $S = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\sin\alpha$.

3.1628B În planul (α) se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura $l = 4\sqrt{3}$ iar pe perpendiculara în A pe (α) se ia punctul D cu $AD = 8$ şi M proiecţia lui D pe BC. Se cere DM. Avem $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = (4\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$, $DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$.

3.1629B Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ aflate în plane neparalele, au laturile omoloage tot neparalele şi cu proprietatea că AA', BB', CC' au un punct comun. Atunci punctele M, N, P aflate la intersecţia perechilor de drepte AB şi $A'B'$, AC şi $A'C'$, respectiv BC şi $B'C'$ sunt coliniare deoarece aparţin evident simultan planelor (ABC) şi $(A'B'C')$ deci dreptei comune.

3.1630B Fiind date patru puncte necoplanare, câte plane distincte ce conţin câte trei dintre aceste puncte se pot construi. Cele patru puncte A, B, C, D sunt vârfurile unui tetraedru, deci se pot duce 4 plane, feţele tetraedrului $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$.

3.1631B Dacă $A'B'C'$ este proiecţia triunghiului ABC pe planul α, atunci centrul de greutate G al lui ABC se proiectează în centrul de greutate G' al triunghiului $A'B'C'$: se observă că medianele lui ABC se proiectează în medianele lui $A'B'C'$.

3.1632B Un plan perpendicular pe o diagonală a unui cub, dus printr-un punct al acesteia, poate tăia cubul după o secţiune S care este punct, triunghi sau hexagon: în ordinea punct, triunghi, hexagon, triunghi, punct, după cum este parcursă diagonala cubului de la un capăt la celălalt.

3.1633B Pe planul paralelogramului $ABCD$ se ridică perpendiculara AE. Să se calculeze distanţele de la punctul E la dreptele BC şi CD ştiind că $AB = 2a$, $AD = AE = a$, $m(\widehat{BAD}) = 60°$. R. Fie M şi N proiecţiile lui A pe BC şi CD. Observăm că $AD \perp BD$, $BD = a\sqrt{3}$, $AM = BD = \sqrt{3}$, $ME = \sqrt{MA^2 + AE^2} = 2a$, $AN = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $EN = \sqrt{EA^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ deci $d(E,(BC)) = 2a$, $d(E,(CD)) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

3.1634B Un pătrat de latură 4 cm se proiectează pe un plan care face cu planul pătratului un unghi de 60°. Atunci aria proiecţiei este $S' = S\cos 60° \text{cm}^2 = 16 \cdot \frac{1}{2}\text{cm}^2 = 8\text{cm}^2$.

3.1635B Un plan intersectează muchiile unui triedru tridreptunghic de vârf O în A, B, C. Fie S aria triunghiului ABC, S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor OAB, OBC, OCA. Atunci $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ Notăm $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ şi α unghiul dintre (ABC) şi (OBC): $S_1^2+S_2^2+S_3^2 = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4} = \frac{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2}{4} = \frac{a^2 \cdot BC^2 + b^2c^2}{4} = \frac{BC^2 \cdot h^2 \sin^2\alpha + b^2c^2}{4} = S^2\sin^2\alpha + S^2\cos^2\alpha = S^2$ (h = înălţimea din O în BOC).

3.1636B Fie $ABCD$ pătratul de latură 1, $M \in [AB]$ astfel încât $AM = \frac{3}{4}$, punctul N pe perpendiculara în D pe planul $ABCD$ astfel ca $ND = \sqrt{2}$. Se cere $d = d(N,(MC))$. R. Fie P proiecţia lui D pe MC; atunci $d(N,MC) = NP$. Avem $MC = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $\frac{PD}{DC} = \frac{BC}{MC}$, $PD = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $NP = \sqrt{ND^2 + PD^2} = \sqrt{2 + \frac{16}{17}} = 5\sqrt{\frac{2}{17}}$.

3.1637B Pe dreapta d de intersecţie a două plane perpendiculare p şi q se iau punctele A sî B iar $C \in p$, $D \in q$ astfel încât $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{ADB} = 90°$. Atunci $\widehat{CBD} = \widehat{CDA} = 90°$. R. Fie $M \in q$, $MB \perp d$; deoarece $p \perp q \Rightarrow \widehat{MBC} = 90°$ (măsura unghiului diedru (p,q)) deci $CB \perp q$ şi $CB \perp BD$. Dar $BD \perp AD$ şi $CB \perp AD \Rightarrow AD \perp (CBD)$ deci $AD \perp CD$.

3.1638B Pe semidreptele Ox, Oy, Oz două câte două perpendiculare se consideră A, B, C situate respectiv pe Ox, Oy, Oz. Atunci proiecţia P a lui O pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC: tetraedrul $OABC$ este ortogonal (adică $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$) condiţie echivalentă cu faptul că un vârf se proiectează în ortocentrul feţei opuse (deci toate vârfurile se proiectează în ortocentrele feţelor opuse.

3.1639B Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de trei puncte necliniare este o dreaptă perpendiculară pe planul celor trei puncte în centrul cercului circumscris triunghiului respectiv.

3.1640B Într-un tetraedru $[VABC]$ de înălţime h, două plane paralele cu baza duse la distanţele $\frac{h}{4}$ şi $\frac{h}{2}$ de vârf împarte tetraedrul în trei poliedre, P_1, P_2, P_3 (P_1 piramidă, P_2, P_3 trunchiuri de piramidă). Se cere raportul volumelor trunchiurilor P_2 şi P_3, $\frac{V_2}{V_3}$. R. Avem $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ (V = volumul $VABC$) $\Rightarrow V_1 = \frac{V}{64}$, $\frac{V_1}{V_1+V_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 + V_2 = 8V_1$, $V_2 = \frac{7}{64}V$, $V_3 = V - (V_1 + V_2) = V - 8 \cdot \frac{V}{64} = \frac{7}{8}V$ deci $\frac{V_2}{V_3} = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$.

3.1641B Un segment de lungime l se proiectează pe trei plane perpendiculare două câte două după trei segmente de lungimi l_1, l_2, l_3. Atunci $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$ deoarece l_1, l_2, l_3 sunt lungimile laturilor unui paralelipiped dreptunghic unde l este lungimea diagonalei (cu o construcţie evidentă).

3.1642C Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte în spaţii neconcurente şi neparalele este format din două drepte concurente şi perpendiculare, drepte care trec prin mijlocul M al perpendicularei comune şi situate într-un plan paralel cu cele două drepte şi care trece prin M.

3.1643C Dacă trei drepte a, b, c au un punct comun O iar M este un punct nesituat pe ele, atunci planele $(Ma), (Mb), (Mc)$ au dreaptă comună, dreapta OM.

3.1644C Fie p un plan şi d_1, d_2 două drepte concurente în C, perpendiculare, cu $A = d_1 \cap p$, $B = d_2 \cap p$, $(\widehat{p, d_1}) = 30°$, $(\widehat{p, d_2}) = 45°$, O proiecţia lui C pe p şi π planul lui $d_{11}d_2$ şi $\alpha = (\widehat{p, \pi})$. Atunci $\alpha = 60°$. Notăm $a = OC$, cu D proiecţia lui C pe AB şi rezultă $AC = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AB = a\sqrt{6}$, $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = a\frac{2}{\sqrt{3}}$ iar $\sin\alpha = \frac{OC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $\alpha = 60°$.

3.1645C Un plan π şi un cerc Γ care nu este în π se intersectează evident în cel mult două puncte: nici unul, unul sau două puncte.

3.1646C Semidreptele Ox, Oy care formează unghiul φ se proiectează pe un plan (P) în semidreptele $O'x'$, $O'y'$ care formează unghiul φ'. Semidreptele Ox, Oy formează cu planul (P) unghiurile α, β. Atunci $\cos\varphi = \cos\varphi'\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Notăm $A = Ox \cap (P)$, $B = Oy \cap (P)$, $a = OA$, $b = OB$, $a' = O'A$, $b' = O'B$, $AB = c$, $O'O = l$ şi obţinem $\cos\varphi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ $= \frac{a^2+b^2-(a'^2+b'^2-2a'b'\cos\varphi')}{2ab} = \frac{a^2+b^2-(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-2ab\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi')}{2ab} =$ $= \frac{a^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\beta}{2ab} + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\beta$. Rămâne să arătăm că $\frac{a^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\beta}{2ab} =$ $\sin\alpha\sin\beta$ relaţie evidentă, deoarece $a\sin\alpha = b\sin\beta = l$ ($a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta = (a\sin\alpha - b\sin\beta)^2 = 0$).

3.1647C Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a ducem un plan (MNP) (unde M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[C'D']$ care intersectează cubul după un hexagon regulat $MNQPRS$ (Q, R, S sunt mijloacele muchiilor $[CC']$, $[D'A']$, $[A'A]$) a cărui perimetru este $3\sqrt{2}a$ deoarece hexagonul are muchia de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3.1648C Să se calculeze valoarea unghiului diedru cu muchia SA dintr-

un tetraedru $SABC$ dacă $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 45°$, $\widehat{ASB} = 60°$. Ducem prin C un plan perpendicular pe SA care intersectează SA în M şi SB în N, deci $CMN = \alpha$ este măsura ungiului diedru cerut. Notăm $SM = a$ şi avem $CM = a$, $SC = a\sqrt{2}$, $SN = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$, $CN = a\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{MC^2+MN^2-CN^2}{2MC\cdot MN} = \frac{a^2+3a^2-2a^2}{2aa\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($CN^2 = (a\sqrt{2})^2+(2a)^2-2(a\sqrt{2})(2a)\frac{\sqrt{2}}{2} = 2a^2$ rezultă şi unghiul $\widehat{SCN} = 90°$).

3.1649C Fiind date patru puncte necoplanare A, B, C, D există patru plane α astfel încât A, B, C, D să fie egal depărtate de α şi anume planele paralele cu una din feţele tetraedrului $ABCD$ la distanţă egală de faţa respectivă şi de vârf.

3.1650C În punctul A al dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 6$, $BC = 3$ se duce perpendiculara pe planul lui $ABCD$ pe care se ia un punct M astfel încât $AM = AB$. Dacă $N \in [MC]$ cu proprietatea $M(\widehat{BND}) = 90$ se cere MN. Notăm $\alpha = m(\widehat{BCM})$, $\beta = m(\widehat{DCM})$ şi avem $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$ iar $CN = x$ şi putem scrie $BN^2 = x^2+3^2-2x3\cos\alpha$, $ND^2 = x^2+6^2-2x6\cos\beta$, $BN^2 + ND^2 = 45$, $2x^2 + 45 - 2x(3\cos\alpha + 6\cos\beta) = 45$, $x = 5$, $MN = 4$.

3.1651C Fie π un plan, $O \in \pi$, $A, B \in \pi$, $OA = 20$ cm, $OB = 16$ şi proiecţia lui OA pe π este 15 cm. Cât este proiecţia lui OB pe π. Notăm O' proiecţia lui O pe π: $OA^2 - O'A^2 = O'O^2 = OB^2 - O'B^2 \Rightarrow 20^2 - 15^2 = O'O^2 = 16^2 - O'B^2 \Rightarrow O'B = 9$.

3.1652C Pe dreptele $d_1, d_2 \in P$ concurente în Q (P un plan) din $M \notin P$ se duc perpendicularele d_1', d_2' cu picioarele M_1, M_2 şi fie N proiecţia lui M pe P. Atunci patrulaterul M_1QM_2N este inscriptibil deoarece $NM_1 \perp d_1$, $NM_2 \perp d_2$ (conform teoremei celor trei perpendiculare).

3.1653C Triunghiul ABC de laturi $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$ se proiectează pe un plan π paralel cu AC după trunchiul $A'B'C'$, unde $A'B' = 4$. Să se calculeze $B'C'$ şi măsura α a unghiului planelor (ABC) şi $(A'B'C')$. Fie π' un plan prin AC paralel cu π şi B'' proiecţia lui B pe π; deoarece $13^2 = 12^2 + 5^2$ unghiul CAB este drept, deci măsura unghiului diedru este chiar BAB'' şi $CA \perp AB''$. Avem $A'B' = AB'' = 4$, $BB'' = \sqrt{5^2-4^2} = 3 = \sqrt{13^2 - CB''^2} \Rightarrow C'B' = CB'' = 4\sqrt{10}$, $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$.

3.1654C În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a să se determine distanţa de la punctul B' la diagonala BD' şi unghiul α dintre AB' şi AC. Fie $B'M$ înălţimea triunghiului $D'B'B$ din B'. Evident $B'M = d(B', BD') = \frac{D'B'\cdot BB'}{BD'} = \frac{a\sqrt{2}\cdot a}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Deoarece $B'A = CA = CB' = a\sqrt{2}$ rezultă că $\alpha = 60°$.

3.1655C Dacă ABC este un triunghi ascuţitunghic, atunci se poate duce un plan ale cărui intersecţii cu muchiile unui triedru tridreptunghic să dea

un triunghi congruent cu ABC. Fie tetraedrul $OABC$ cu triedrul din O tridreptunghic şi $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Scriem sistemul evident $y^2+z^2 = a^2$, $z^2+x^2 = b^2$, $x^2+y^2 = c^2$, $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$, $x^2 = \frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$, $y^2 = \frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$, $z^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$. Deoarece triunghiul ABC este ascuţit unghic, expresiile care ne dau pe x^2, y^2, z^2 sunt pozitive deci x, y, z există, deci planul cu proprietatea cerută se poate duce.

3.1656C Pe planul triunghiului ABC se duce perpendiculara MC. Să se calculeze distanţa d de la punctul A la planul MBC ştiind că $AB = \sqrt{106}$, $AC = 5$, $MA = 13$, $MB = 15$. R. Rezultă $MC = \sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{169-25} = 12$, $BC = \sqrt{15^2-12^2} = \sqrt{81} = 9$, $9^2 + 5^2 = 106$ deci triunghiul ACB este dreptunghic în C şi distanţa cerută este $AC = 5$.

3.1657C E este mijlocul lui CD în cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de latură a. Atunci planele AED_1 şi C_1BD sunt perpendiculare. R. Notăm $N = [D_1E]\cap[DC_1]$ şi $M = [AE]\cap[BD]$. Observăm că $\frac{DE}{D_1C_1} = \frac{1}{2} = \frac{EN}{ND} = \frac{ND}{NC_1}$, $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{EM}{MA} = \frac{MD}{MB}$ deci $NE = ME = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{a\sqrt{5}}{6}$, $DN = DM = \frac{1}{3}DB = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a$. Dacă P este mijlocul lui MN, folosind teorema reciprocă a lui Pitagora se arată că unghiul DPE este drept.

3.1658C Dacă $[VABC]$ este o piramidă regulată cu latura bazei l şi muchia laterală m, $m > l$ iar $D = pr_{rB}A$ atunci volumul tetraedrului $[VACD]$ este $V = \frac{l^2(2m^2-l^2)}{24l^2}\sqrt{3m^2-l^2}$. $VD = m\cos\alpha = \frac{2m^2-l^2}{2m}$, $I = DD'$ (înălţimea din D în ΔADC), $I = \sqrt{AD^2-l^2} = \frac{l\sqrt{3m^2-l^2}}{2m}$, $V = \frac{l\cdot I}{2}\cdot\frac{VD}{3}$.

3.1659C Dreapta CD este perpendiculară pe planul triunghiului echilateral ABC de latura a iar $[AD$ şi $[BD$ formează cu planul (ABC) ungiuri de măsură β. Dacă θ = unghiul dintre planele (ABC) şi ABD atunci $\mathrm{tg}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\beta$: $CD = l = a\mathrm{tg}\beta$, $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\theta = \frac{l}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\beta$.

3.1660C În triunghiul dreptunghic ABC catetele sunt $AB = 3$, $AC = 4$ deci $BC = 5$. Determinaţi distanţa d de la A la planul π' care trece prin BC şi face cu planul π al triunghiului ABC un unghi de 30°. Notăm cu D intersecţia lui π' cu perpendiculara în A pe π, A' şi A'' proiecţiile lui A pe BC respectiv pe DA'. Rezultă $A'A = \frac{3\cdot4}{5} = \frac{12}{5}$, $AD = l$, $A'D = 2l$, $l = \frac{12}{5\sqrt{3}} = AD$, $A'D = \frac{24}{5\sqrt{3}}$, $d = A''A$, $d\cdot A'D = AD\cdot A'A$, $d = \frac{12}{5}\cdot\frac{12}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{24} = \frac{6}{5}$.

3.9 Ecuaţiile dreptei şi planului

3.1661A Dreptele $x-2y+3=0$, $-x+y+1=0$, $2x-3y+a=0$ sunt concurente dacă sistemul este compatibil deci $x=5$, $y=4$ verifică ecuaţia $2x-3y+a=0$, deci $a=2$.

3.1662A Capetele segmentului $AB=13$ şi $CD=20$ se află în planele paralele α şi β, $d=d(\alpha,\beta)$ $(A,C\in\alpha, B,D\in\beta)$ iar suma lungimilor proiecţiilor lor pe β este 21. Atunci $d=12$. Avem $\sqrt{13^2-d^2}+\sqrt{20^2-d^2}=21\Rightarrow d=12$.

3.1663A Dacă planul $ax+by+cz+d=0$ trece prin $M(-1,2,-3)$ şi are normala $\vec{n}=(5,-4,1)$ atunci $s=a+b+c+d=18:5(x+1)-4(y-2)+(z+3)=0$, $5x-4y+z+16=0$, $s=18$.

3.1664A Planele $(m-1)x+3y+3mz-1=0$, $mx+y-z+5$ sunt perpendiculare dacă $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, $\vec{n}_1=(m-1)\vec{i}+3\vec{j}+3m\vec{k}$, $\vec{n}_2=m\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, deci $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=m(m-1)+3-3m=0$ deci $m=1$ sau $m=3$.

3.1665A Planul prin $A(3,-2,-7)$ şi paralel cu planul $2x-3z+5=0$ este $2x-3z+p=0$, $2\cdot3-3(-7)+p=0$, $p=-27$, deci $2x-3z-27=0$.

3.1666A Planul prin $O(0,0,0)$ perpendicular pe planele $2x-y+3z-1=0$ şi $x+2y+z=0$ este planul de normală $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, $\vec{n}_1=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{n}_2=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{n}=-7\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$, deci $7x-y-5z=0$.

3.1667A Distanţa de la $P(1,-1,3)$ la planul $3x+3y+z-8=0$ care trece prin $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$ este $d=\frac{|3\cdot1+3(-1)+1\cdot3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{19}}$.

3.1668A Planele $2x+ay+3z-5=0$, $bx-6y-6z+2=0$ sunt paralele dacă $\frac{2}{b}=\frac{a}{-6}=\frac{3}{-6}$ deci $a=3$, $b=-4$.

3.1669A Planul prin $A(7,2,-3)$ şi $B(5,6,-4)$ paralel cu Ox este $\begin{vmatrix} x-7 & y-2 & z+3 \\ 5-7 & 6-2 & -4+3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $y+4z+10=0$.

3.1670A Cât este $s=a+b+c$ dacă planul $ax+by_cz-9=0$ trece prin $A(1,-1,-2)$, $B(3,1,1)$ şi este perpendicular pe planul $x-2y+3z-5=0$. Se obţine sistemul $a-2b+3c=0$, $a-b-2c=9$, $2a+b+c=9$ cu $a=4$, $b=-1$, $c=-2$ şi $s=1$.

3.1671A Dreapta d prin $A(-4,-5,3)$ şi care intersectează dreptele $d_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ poate avea parametrii directori

$(3,2,-1)$: d este intersecţia planelor $\pi_1=(A,d_1)$, $\pi_2=(A,d_2)$ date de

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z-2 \\ -4+1 & -5+3 & 3-2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad \pi_2:\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ -4-2 & -5+1 & 3-1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}=0$$

deci $\pi_1: x+3z-5=0$, $\pi_2: -7x+13y+5z+22=0$ de unde $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(\vec{i}+3\vec{k})\times(-7\vec{i}+13\vec{j}+5\vec{k})=-39\vec{i}-26\vec{j}+13\vec{k}=-13(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$.

3.1672A Parametrii directori ai dreptei d prin $A(-1,2,-3)$ perpendiculară pe $\vec{a}=(6,-2,-3)$ şi care intersectează dreapta $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{5}$ sunt $(2,-3,6)$; d este intersecţia planului π prin A de normală $\vec{a}$ şi a planului π_1 determinat de A şi d_1, $\pi: 6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0$, $\pi_1: 27x-8y-13z+4=0$ deci $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k})\times(27\vec{i}-8\vec{j}-13\vec{k})=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

3.1673A Dreapta $d:\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ este perpendiculară pe vectorul $\vec{v}=\vec{u}-\vec{j}+c\vec{k}$ dacă vectorul director $\vec{u}$ al dreptei d, $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=-5\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$ este perpendicular pe $\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $2\cdot(-5)+(-1)\cdot(-8)-c=0$, $c=-2$.

3.1674A Proiecţia punctului $A(2,-1,3)$ pe dreapta $d:\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}=t$ este intersecţia B a planului $\pi: 3(x-2)+5(y+1)+2(z-3)=0$ prin A cu normală $\vec{N}=(3,5,2)$, direcţia dreptei $d: t=1$, $B(3,-2,4)$.

3.1675A Simetricul A^* al punctului $A(4,1,6)$ în raport cu dreapta $d:\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ este simetricul lui A faţă de punctul M de intersecţie al planului π prin A de normală $\vec{N}=\vec{v}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=8\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$ direcţia lui $d:\pi: 8(x-4)-6(y-1)+3(z-6)=0$, $8x-6y+3z-44=0$. Se obţine $M(3,-1,4)$, $A^*(2,-3,2)$.

3.1676A Dreapta prin $A(1,2,3)$ paralelă cu $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ este $x-1=y-2=z-3$.

3.1677A Distanţa l între punctele M_0 şi M_1 de pe dreapta $d: x=-4t+5$, $y=4t$, $z=2t-2$ corespunzătoare valorilor $t=0$, $t=1$, $M_0(5,0,-2)$, $M_1(1,4,0)$ este $l=\sqrt{(5-1)^2+(0-4)^2+(-2-0)^2}=6$.

3.1678A Planul π prin $A(3,-2,5)$ perpendicular pe dreapta $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$ de direcţie $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ este $2(x-3)-(y+2)+z-5=0$.

3.1679A Punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de intersecţie al planelor $x+y+z=6$, $2x-y+z=3$, $x+2y-z=2$ este dat de soluţia sistemului, $M_0(1,2,3)$.

3.1680A Unghiul α al planului xOy de normală $\vec{N} = \vec{k}$ cu dreapta $d : x = y = z$ de direcţie $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{|\vec{k}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3.1681A Planul $P : x+y = 1$ este paralel cu Oz ($\vec{k} \perp \vec{i}+\vec{j}$) deci $P \cap Oz = \emptyset$.

3.1682A Intersecţia planului $x + y - 4z = 1$ cu dreapta $x = y = 2z$ este punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ soluţie a sistemului $2z + 2z - 4z = 1$, $0 = 1$ deci $A \in \emptyset$.

3.1683A Intersecţia dreptei $D : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} = t$ cu planul $P : x + 5y - 2z + 3 = 0$ este punctul $A_1\left(\frac{53}{4}, \frac{13}{2}, -\frac{7}{4}\right) \neq A(2, -1, 2)$ ($t = \frac{15}{4}$ pentru A_1).

3.1684A Distanţa d între planele $\pi_1 : 2x-y+z+5 = 0$, $\pi_2 : 6x-3y+3z-1 = 0$: intersectăm dreapta δ prin origine de direcţie $\vec{v} = \vec{N} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\delta : x = 2t$, $y = -t$, $z = t$ şi obţinem $M_1 = \pi_1 \cap \delta$, $M_2 = \pi_2 \cap \delta_1$, $d = d(M_1, M_2) = \frac{8\sqrt{6}}{9}$, $M_1\left(-\frac{10}{6}; \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $M_2\left(\frac{2}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{18}\right)$, $t_1 = -\frac{5}{6}$, $t_2 = \frac{1}{18}$.

3.1685A Distanţa de la $A(1, 0, 2)$ la planul $\pi : 2x - 2y + z - 3 = 0$ este $d = \frac{|2\cdot1+(-2)\cdot0+1\cdot2-3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = \frac{1}{3}$.

3.1686A Planul prin $A(3, -1, 0)$ de normală $\vec{u} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ este $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ deci $x - 3 + 2(y + 1) + z = 0$, $x + 2y + z = 1$.

3.1687A Planul care trece prin $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, -1, 1)$, $D(0, -1, 1)$, $E(-1, 0, 1)$ este $z = 1$, singurul care verifică grila.

3.1688A Planele $(\alpha+2)x+3y+z+2\beta-1 = 0$, $6\alpha x+(4-\beta)y-\beta z+\alpha+2 = 0$ sunt paralele dacă $\frac{\alpha+2}{6\alpha} = \frac{3}{4-\beta} = \frac{1}{-\beta}$ deci $\alpha = 1$, $\beta = -2$.

3.1689A Dreptele $d_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$, $d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{m}$ sunt perpendiculare dacă $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot 3 + 2(-3) + 3 \cdot m = 0$, $m = 1$.

3.1690A Punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ deci şi $A(-2, 4, -2)$, $B(1, 3, 1)$, $C(2, 4, 0)$, $D(-1, y, -6)$ sunt coliniare dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & y & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 7.$$

3.1691B Funcţia $s = s(t)$ definită de condiţia ca punctul (s, t, st), $s, t \in \mathbf{R}$, $t \in (-2, -\infty)$ să aparţină planului $2x + 3y + z + 1 = 0$: $2s + 3t + st + 1 = 0$ este $s = s(t) = -\frac{1+3t}{2+t}$ descrescătoare, $s'(t) = -\frac{5}{(2+t)^2}$.

3.1692B Dreptele din enunţ sunt oarecare (nu sunt paralele, perpendiculare, confundate sau în planul xOy).

3.1693B Intersecţia planelor $P_1 : 8x + 3y + 5z = 4$, $P_2 : 18x - 3y + 13z = 6$, $P_3 : 3x - 3y + 4z = 1$ este un punct $M\left(1, \frac{11}{27}, -\frac{4}{9}\right)$.

3.1694B Condiţia ca $|PA - PB|$ să fie maximă, unde $A(3, -2, -5)$, $B(8, -4, -13)$, $P(a, 0, b)$ este ca A, B, P să fie coliniare deci $\frac{a-3}{8-3} = \frac{0+2}{-4+2} = \frac{b+5}{-13+5}$ de unde $a = -2$, $b = 3$.

3.1695B Planul prin $A(3, 4, -5)$ şi paralel cu $\vec{u} = (3, 1, -1)$ şi $\vec{v} = (1, -2, 1)$: $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$, $M(x, y, z)$.

3.1696B Planul prin punctele $A(2, -1, 3)$, $B(3, 1, 2)$ şi paralel cu $\vec{u} = (3, -1, -4)$ este $9x - y + 7z - 40 = 0$: $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \vec{u}) = 0$, $M(x, y, z)$ deci $[(x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-3)\vec{k}] \cdot [(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \times (3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k})] = 0$.

3.1697B Punctul $M(m, n, p) \in \pi : x - z + 1 = 0$ şi $M \in d : x - 1 = y - 2 = z - 3 = t$; dar $\pi \| d$.

3.1698B Volumul piramidei ale cărei feţe sunt planele de coordonate şi planul $\pi : 3x + 6y - 2z - 24 = 0$ (planul de tăieturi $8, 4, -12$) este $V = \frac{1}{6}(8 \cdot 4 \cdot 12) = 64$.

3.1699B Distanţa de la $M_0(3, 1, -1)$ la planul $\pi : 22x + 4y - 20z - 45 = 0$ este $d = \frac{|22\cdot3+4\cdot1+(-20)(-1)-45|}{\sqrt{22^2+4^2+20^2}} = \frac{45}{2\sqrt{225}} = \frac{3}{2}$.

3.1700B Planul $\pi : x + y + z = a$ taie axele Ox, Oy, Oz în punctele A, B, C iar volumul tetraedrului $OABC$ este $\frac{1}{6}$. Atunci $a = 1$: $V = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6}$.

3.1701B Proiecţia dreptei $d : x = y = az$ ($a \in \mathbf{R}$) pe xOy este dreapta $x - y = z = 0$ deoarece $d \in \pi : x = y$, iar $\pi \perp xOy$; deci $a = 1$.

3.1702B Simetricul lui $A(1, 4, -3)$ faţă de $\pi : x + 5y - 2z + 3 = 0$ este $A'(-1, -6, 1)$ (vezi 3.1674A, 3.1675A).

3.1703B Planul prin $M(2, 8, 0)$ care conţine dreapta $D : \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{9}$ este planul prin $M, N(5, -1, 2)$ paralel cu $\vec{v} = (4, -3, 9)$ (3.1696B).

3.1704B Planul prin $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$: se scrie $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$, $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -[4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}]$, $4x + 2y + 3z - 17 = 0$.

3.1705B Fie punctele $A(0, \alpha, 0)$, $B(4, 0, 3)$ şi planul $\pi : 3x + 4y + 25 = 0$. Dacă $d(A, B) = d(A, \pi)$ atunci $\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{3}$: $d^2(A, B) = \alpha^2 + 25 = d^2(A, \pi) = (4\alpha + 25)^2/25$, $\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

3.1706B Planul prin $A(1, 2, 3)$ perpendicular pe $\vec{a} = 2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ este $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, $M(x, y, z)$, deci $2(x - 1) - (y - 2) - (z - 3) = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$.

3.1707C A şi B se află de aceeaşi parte a planului xOy deci minimul este AB', B' simetricul lui B faţă de xOy.

3.1708C Acelaşi raţionament ca pentru 3.1707C.

3.1709C Un vector director al bisectoarei unghiului ABC, $A(5, -14, 3)$,

$B(-1,-2,7)$, $C(-3,1,1)$ este $\frac{\overrightarrow{BA}}{BA}+\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}=\frac{6\vec{i}-12\vec{j}-4\vec{k}}{14}+\frac{-2\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}}{7}$, deci $(-1,3,8)$.

3.1710C Abscisa x_0 a punctului $M_0(x_0,0,0)$ egal depărtat de planele π_1 : $4x-7y+14z+6=0$ şi π_2 : $x-2y+2z+2=0$: $\frac{|4x_0+6|}{3\sqrt{29}}=\frac{|x_0+2|}{3}$, $\frac{4x_0+6}{x_0+2}=\pm\sqrt{29}$.

3.1711C Un vector normal la plan este $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, $\vec{N}_1=(2,1,2)$, $\vec{N}_2=(1,2,1)$, $\vec{N}=-3\vec{i}+3\vec{k}$: $x-1-(z-2)=0$, $x-z+1=0$.

3.10 Poliedre. Arii şi volume

3.1712A Diagonala unei feţe a unui cub de volum 8 este $2\sqrt{2}$. Dacă latura cubului este l, volumul este $l^3=8$, $l=2$ şi diagonla $d=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

3.1713A Latura unui tetraedru regulat de volum a^3 este $a\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$. Notăm cu x latura tetraedrului, $l=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ este înălţimea unei feţe şi h înălţimea tetraedrului, atunci $h=\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{3}l\right)^2}=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=x\sqrt{\frac{2}{3}}$, aria unei feţe $S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ iar volumul $V=\frac{S\cdot h}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot x\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(\sqrt{2})^3}=a^3\Rightarrow x=a\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$.

3.1714A Volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de lungime a şi înălţimea h este $V=\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$ aria bazei este $S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, deci $V=S\cdot h=\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

3.1715A Dacă raportul volumelor unei piramide patrulatere regulate şi al trunchiului obţinut prin secţionarea piramidei cu un plan paralel cu baza este $\frac{27}{19}$, atunci raportul subunitar al ariilor bazelor trunchiului este $k^2=\frac{4}{9}$. Fie V şi V' volumele piramidei mari şi a celei mici obţinute prin secţionare; atunci $\frac{V}{V-V'}=\frac{27}{19}$, $1-\frac{V'}{V}=\frac{19}{27}$, $1-k^3=\frac{19}{27}$, $k^3=\frac{8}{27}$, $k=\frac{2}{3}$; raportul ariilor este evident $k^2=\frac{4}{9}$.

3.1716A Diagonala unui paralelipiped dreptunghic care are înălţimea 4, aria bazei 6 şi o latură a bazei3 este de lungime $l=\sqrt{29}$: cealaltă latură a bazei este evident de lungime $b=\frac{6}{3}=2$, deci $l=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=\sqrt{29}$.

3.1717A Şase plane distincte care conţin înălţimea unei prisme patrulatere regulate de volum V şi planul mediator al înălţimii împart prisma în corpuri distincte de acelaşi volum v. Cât este v? Din enunţ se observă că cele şapte plane împart prisma în 24 părţi egale, deci $v=\frac{V}{24}$.

3.1718A Aria laterală a unui tetraedru regulat de latura 2 este $S=3\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$.

3.1719A O prismă triunghiulară care are aceeeaşi bază şi înălţimea cu a unui tetraedru regulat de volum 1 are evident volumul 3.

3.1720A Volumul piramidei determinate de trei muchii adicacente ale unui cub de latură a este $V=\frac{a^3}{6}$: muchiile din vârf ale piramidei formează un triedru tridreptunghic, iar baza este un triunghi echilateral cu laturile, diagonalele feţelor cubului: $V=\frac{S\cdot h}{3}=\frac{a\cdot a}{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{6}$.

3.1721A Dacă volumul piramidei hexagonale regulate $VABCDEF$ este x, atunci cel al tetraedrului $VACE$ este $\frac{x}{2}$ deoarece aria triunghiului echilateral ACE este jumătate din aria hexagonului $ABCDEF$.

3.1722A Dacă volumul şi aria totală a unui cub au aceeaşi valoare numerică, atunci latura cubului este $l=6$: condiţia este $6l^2=l^3\Rightarrow l=6$.

3.1723A Cubul construit pe baza unei piramide patrulatere regulate (cu latura bazei a şi înălţimea h) are acelaşi volum cu al piramidei. Atunci raportul $k=\frac{a}{h}$ este $\frac{1}{3}$. Condiţia se scrie $a^3=\frac{a^2\cdot h}{3}$ deci $k=\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$.

3.1724A Un paralelogram de arie 2 se proiectează pe un plan π ce face un unghi de 30° cu planul paralelogramului. Atunci aria S a poligonului rezultat prin proiecţie este $S=2\cos 30°=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

3.1725A Într-o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei l toate feţele au aceeaşi arie S. Dacă aria totală este $5\sqrt{3}$, atunci înălţimea prismei este $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$: Condiţia se scrie $\frac{l\cdot l\sqrt{3}}{2\cdot 2}=lh\Rightarrow h=\frac{l\sqrt{3}}{4}$, $2\frac{l^2\sqrt{3}}{4}+3lh=5\sqrt{3}$, $5\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}\Rightarrow l=2, h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1726A Secţiunea unui cub de latură 1 cu un plan ce conţine diagonala cubului şi este paralel cu diagonala unei feţe are aria $S=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Secţiunea este un romb cu o diagonală chiar diagonala cubului şi cealaltă egală cu diagonala unei feţe deci aria este $\frac{1}{2}$ din produsul lor, $S=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3.1727A Fie O,O' centrele bazelor paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ de volum 24 şi fie M mijlocul muchiei CC'. Calculaţi volumul corpului $VABC$ unde $\{V\}=(MAB)\cap OO'$. Dacă S este aria unei baze şi h înălţimea paralelipipedului atunci aria bazei ABC a tetraedrului $VABC$ este $\frac{1}{2}S$ iar înălţimea $OV=\frac{1}{4}h$, deci volumul v al lui $VABC$ este $v=\frac{\frac{S}{2}\cdot\frac{h}{4}}{3}=\frac{Sh}{24}=\frac{24}{24}=1$.

3.1728A Apotema unui tetraedru regulat de latură $\sqrt{6}$ este înălţimea unei feţe deci $a=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

3.1729A În piramida triunghiulară $OABC$, muchiile OA, OB, OC sunt perpendiculare două câte două. Dacă $OA=OB=2$, $OC=4$ să se găsească distanţa de la 0 la faţa ABC. R. Notăm cu M mijlocul lui AB şi cu ON înălţimea lui COM. ON este distanţa cerută. R. $OM=\sqrt{2}$, $CM=$

$\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$, $OC\cdot OM=ON\cdot MC\Rightarrow ON=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{4}{3}$.

3.1730A În tetraedrul $ABCD$, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel iar piciorul O al înălţimii din D este centrul cercului circumscris lui ABC. Să se calculeze volumul V al lui $ABCD$ cunoscând raza cercului circumscris lui ABC, $R=12$ şi muchia $BD=13$. Evident O este mijlocul lui AC, $\hat{B}=\frac{\pi}{2}$, $OB=12$, $OD=\sqrt{BD^2-OB^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $V=\frac{12^2\cdot 5}{3}=240$.

3.1731A Baza unei prisme drepte este un triunghi cu laturile 6,8,10 iar înălţimea este egală cu 25. Se cere volumul V şi aria laterală A. R. Baza este triunghi dreptunghic, deci $V=\frac{6\cdot 8}{2}\cdot 25=600$, $A=(6+8+10)25=600$.

3.1732A Dacă în tetraesrul $ABCD$, avem $AB=BC$ şi $AD=DC$ atunci $AC\perp BD$; triunghiurile ABC şi ADC sunt isoscele, medianele DM şi BM sunt şi înălţimi deci $AC\perp MD$, $AC\perp MB\Rightarrow AC\perp(MBD)$ adică $AC\perp BD$.

3.1733A Secţiunea $MNPQ$ a tetraedrului regulat $ABCD$ cu muchia a ($M\in AC$, $N\in BC$, $P\in BD$, $Q\in AD$) cu un plan variabil paralel cu muchiile opuse $[AB]$ şi $[CD]$ este un dreptunghi (deoarece muchiile opuse sunt perpendiculare). Se cere aria maximă a secţiunii. Notăm $\frac{MC}{AC}=x=\frac{MN}{AB}\Rightarrow MN=ax$, $\frac{QM}{DC}=\frac{AM}{AC}=\frac{AC-MC}{AC}=1-x\Rightarrow QM=a(1-x)$, $S(x)=a^2x(1-x)$ are maximul în $x=\frac{1}{2}$ şi anume $S=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$ (pentru $y=x(1-x)$, $x_V=\frac{1}{2}$, $y_V=\frac{1}{4}=$ maximul).

3.1734A Pentru cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a distanţa $h=d(A,A'BD)$ este $h=\frac{a}{\sqrt{3}}$; scriem volumul tetraedrului $AA'BD$ în două moduri: $V=\frac{a^3}{6}=\frac{h}{3}S_{\Delta BDA'}=\frac{h}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot\left(a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}$, deci $h=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

3.1735A Măsura unghiului diedru dintre două feţe ale unui tetraedru regulat este $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$; α este unghiul între două apoteme (înălţimi ale feţelor) de lungimi $l=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3}$ (altfel $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$).

3.1736A Volumele prismei triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$ (cu bazele ABC, $A'B'C'$) şi ale tetraedrului $ABCA'$ sunt V şi v. Atunci $v=\frac{V}{3}$: volumul prismei este dat de produsul ariei bazei cu înălţimea iar volumul piramidei o treime din acestea.

3.1737A Baza piramidei $VABCD$ este un romb $ABCD$ cu diagonalele de lungime 8 şi 6 iar înălţimea piramidei VO este de lungime 5. Atunci volumul este $V=40$: $V=\frac{8\cdot 6}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{3}=40$.

3.1738A Dacă diagonala unui cub este a, volumul cubului este $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$:

$a^2=3l^2$ ($l=$ latura cubului), $V=l^3=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

3.1739A Volumul prismei triunghiulare regulate drepte $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei $AB=a$ şi $BA'\perp CB'$ este $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$; notăm C'' simetricul lui C' faţă de C; triunghiul $A'BC''$ este isoscel dreptunghic în $B(CB'||C''B)$ şi $h=AA'$ ne dă $(A'C'')^2=2h^2+a^2=A'B^2+C''B^2=2(a^2+h^2)\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $V=\frac{a2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

3.1740A Un trunchi de piramidă are raportul lungimilor b şi a ale laturilor bazei mici şi mari $\frac{3}{5}$ iar volumul piramidei regulate din care provine este 125. Se cere volumul V al trunchiului. Notăm V_1 volumul piramidei mici şi avem $\frac{V_1}{125}=\left(\frac{3}{5}\right)^3$, $V=125-27=98$.

3.1741A Latura bazei unei piramide patrulatere regulate a cărei arie laterlă este $2\sqrt{3}$ şi înălţimea egală cu 1 este $a=\sqrt{2}$; $S_{lat}=2\sqrt{3}=4\frac{a\cdot\sqrt{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}\Rightarrow$ $a=\sqrt{2}$ (apotema unei feţe este $\sqrt{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$).

3.1742A Piramida $MABC$ are în A un triedru tridreptunghic ($MA\perp AB, MA\perp AC, AB\perp AC$) $AB=AC=a$, $AM=x$, $AH\perp(MBC)$ cu $H\in(MBC)$. Se cere x astfel ca volumul piramidei $HABC$ să fie maxim. Dacă N este mijlocul lui BC atunci $H\in[MN]$, $AH\perp MN$, $NM=\sqrt{x^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$, $AH\cdot NM=AN\cdot AM$, $AH=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot x}{\sqrt{x^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{ax}{\sqrt{2x^2+a^2}}$. Notând cu H' proiecţia lui H pe AN avem $\frac{H'H}{AH}=\frac{AN}{NM}$, $H'H=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{ax}{\sqrt{2x^2+a^2}}}{\sqrt{\frac{2x^2+a^2}{2}}}=\frac{a^2x}{2x^2+a^2}$. Volumul lui $HABC$ este $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2x}{2x^2+a^2}$ ($H'H$ este înălţimea piramidei) maximul funcţiei $\frac{x}{2x^2+a^2}=f(x)$ se realizează pentru $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ deoarece $f'(x)=\frac{a^2-2x^2}{(2x^2+a^2)^2}=0\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3.1743A Dacă la un paralelipiped dreptunghic diagonala este d iar $s=a+b+c$, a,b,c fiind cele trei dimensiuni, atunci aria totală este evident $S=2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=s^2-d^2$.

3.1744A Dacă A este mulţimea acelor numere naturale care pot reprezenta numărul de muchii ale unei piramide regulate cu toate muchiile de aceeaşi lungime, atunci $A=\{6,8,10\}$ deoarece numai detraedrul, piramida patrulateră şi piramida pentagonală pot avea această proprietate: dacă numărul laturilor bazei este mai mare sau egal cu şase proprietatea nu mai are loc, deoarece rază cercului circumscris bazei deci şi muchiile laterale sunt mai mari decât latura bazei.

3.1745A Suma distanţelor de la un punct interior unui paralelipiped dreptunghic, de laturi a, b, c la cele şase feţe este $a + b + c$, deoarece suma distanţelor la două feţe opuse este chiar dimensiunea corespunzătoare.

3.1746A Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu aria totală 3 şi cu dimensiunile a, b, c respectiv proporţionale cu $4, 6, 9$ este $V = \frac{27}{19\sqrt{19}} : \frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = k$, $S_{tot} = 2(ab+ac+bc) = 3$, $V = abc = 4 \cdot 6 \cdot 9k^3$, $2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot 9)k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $V = \frac{27}{19\sqrt{19}}$.

3.1747A Volumul unui paralelipiped drept bază un romb de latură $\sqrt{3}$ având un unghi ascuţit de $60°$ şi lungimea diagonalei mari $d = 5$ este $V = 6\sqrt{3}$: diagonalele rombului sunt evident $d_1 = \sqrt{3}$, $d_2 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$, înălţimea $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $V = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot 4 = 6\sqrt{3}$.

3.1748B Suma distanţelor h_1, h_2, h_3, h_4 ale unui punct variabil O din interiorul unui tetraedru $ABCD$ la feţele sale, tetraedrul având ariile feţelor egale, este egală cu o înălţime. Evident toate înălţimile sunt egale. Scriem că suma volumelor tetraedrelor $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$ este egală cu volumul tetraedrului $ABCD$: $\frac{h_1 \cdot S}{3} + \frac{h_2 \cdot S}{3} + \frac{h_3 \cdot S}{3} + \frac{h_4 \cdot S}{3} = \frac{hS}{3}$.

3.1749B În tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchiile egale cu a, M şi N sunt mijloacele lui AB respectiv CD. Atunci $MN\sqrt{2} = AB = a$: ΔANB este isoscel, $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN \perp AB$, $MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

3.1750B În tetraedrul regulat cu muchiile de lungime a şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD şi ADB, aria triunghiului $G_1G_2G_3$ este $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}$. Triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral cu latura $l = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$, $S = S_{G_1G_2G_3} = \frac{a}{3} \cdot \left(\frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}$.

3.1751B Dacă S, s sunt ariile bazelor unui trunchi de piramidă şi S^* aria secţiunii cu un plan dus la distanţă egală de baze, atunci $S^* = \left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{s}}{2}\right)^2$. Notăm cu h', h^*, h înălţimile celor trei piramide care apar (în ordinea mărimii) şi obţinem $h^* = \frac{h-h'}{2} + h' = \frac{h+h'}{2}$, $\frac{S^*}{S} = \left(\frac{h^*}{h}\right)^2$, $\frac{s}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$, $\frac{h^*}{h} = \sqrt{\frac{S^*}{S}}$, $\frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{s}{S}}$, $\frac{h^*}{h} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h'}{h}\right)$, $\sqrt{\frac{S^*}{S}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{s}{S}}\right) \Rightarrow S^* = \left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{s}}{2}\right)^2$.

3.1752B Secţiunea într-un tetraedru regulat cu un plan paralel cu două muchii opuse este un dreptunghi, deoarece tetraedrul este ortogonal (muchiile opuse sunt perpendiculare, vezi şi 3.1733A).

3.1753B Într-un tetraedru $VABC$ (cu $VA \perp AB$, $VA \perp AC$, $AB \perp AC$, $AB = AC = a$, D mijlocul unui BC, $VA = AD$, unghiul α între planele VAB şi VBC este $60°$: fie $A' \in (VB)$, $A'A \perp VB \Rightarrow VB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $A'A \cdot VB = VA \cdot AB$, $A'A = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\text{tg}\alpha = \frac{AC}{A'A} = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

3.1754B În tetraedrul $OABC$ cu triedrul din O tridreptunghic ($OA \perp OB, OA \perp OC, OB \perp OC$) şi dimensiunile $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ volumul este $V = \frac{abc}{6}$ deoarece aria bazei OAB este $\frac{ab}{2}$ iar înălţimea c.

3.1755B Pentru tetraedrul $ABCD$ cu $AC \perp BD$ raportul $k = \frac{AB^2+CD^2}{AD^2+BC^2}$ este 1. Fie M proiecţia lui B pe AC; evident $DM \perp AC$ deci $k = \frac{BM^2+AM^2+MD^2+MC^2}{AM^2+MD^2+BM^2+MC^2} = 1$.

3.1756B Piramida $VABC$ are în A un triedru tridreptunghic ($AV \perp AB$, $AV \perp AC, AB \perp AC$), $BC = 25$, $AC = x$, $AB = x - 5$, $AV = 2x - 5$. Atunci volumul este $V = 1750$: $AB^2 + AC^2 = BC^2$, $(x-5)^2 + x^2 = 625$, $x^2 - 5x - 30 = 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1225}}{2}$; $x = 20$, $V = \frac{15 \cdot 20 \cdot 35}{6} = 1750$.

3.1757B Dacă un tetraedru are două feţe triunghiuri echilaterale de latură a şi două feţe triunghiuri dreptunghice isoscele, atunci aria totală S şi volumul V sunt $S = a^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$. Acest tetraedru se poate obţine dintr-un pătrat $ABCD$ cu centrul O prin rotirea în jurul diagonalei AC a triunghiului ADC cu un unghi de $90°$: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, $OD \perp OB$, $OD = OB = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BD = CD = CB = BA = AD = a$, $AC = \sqrt{2}a$. Rezultă $S = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $V = \frac{a^2}{2} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

3.1758B Într-un tetraedru regulat $ABCD$ de muchie l distanţa dintre mijloacele a două muchii opuse (bimediana) este $d = \frac{l}{\sqrt{2}}$ sunt: Dacă M şi N mijloacele muchiilor AB şi CD, triunghiul MND este dreptunghic în N, $MD = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, $ND = \frac{l}{2}$, $d = \sqrt{MD^2 - ND^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

3.1759B Într-un tetraedru regulat suma S a distanţelor de la un punct interior la feţele acestuia este egal cu înălţimea. Scriem că suma volumelor celor patru tetraedre cu vărful în punctul dat şi bazele feţele tetraedrului este egală cu volumul tetraedrului iniţial $V = \frac{\sigma \cdot h}{3} = \frac{\sigma}{3} \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$ (σ = aria unei feţe, h_i distanţele la feţe) $\Rightarrow h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$.

3.1760B Fie M mijlocul muchiei DC în tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie m şi V volumul piramidei $DABM$. Atunci volumul piramidei $DABM$ cu baza DAB este jumătate din volumul lui $ABCD$ (înălţimea din M pe DAB este jumătatea înălţimii din C pe DAB) deci $V = \frac{1}{2} \cdot S_{DAB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot m\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot m\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{24}m^3$.

3.1761B Volumul unei piramide patrulatere regulate cu S aria secţiunii diagonale şi α unghiul între o muchie laterală şi planul bazei este $V = \frac{2}{3}\sqrt{S^3}\text{ctg}\alpha$. R. Dacă a este latura bazei şi h înălţimea piramidei atunci

$S = \frac{a\sqrt{2}}{2}h$, $h = \frac{a}{\sqrt{2}}\text{tg}\alpha$, $a^2 = 2S\text{ctg}\alpha$, $ah = \sqrt{2}S$, $V = \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{2S\text{ctg}\alpha}}{3}\sqrt{2}S = \frac{2}{3}\sqrt{S^3\text{ctg}\alpha}$.

3.1762B Pe perpendiculara pe planul (BAC) în vârful A al triunghiului isoscel BAC $(AB = AC)$ se consideră un punct mobil M. Se cere locul geometric al proiecţiei P al punctului A pe planul (MBC). Notăm $N = (MP) \cap (BC)$ şi rezultă $\widehat{APN} = 90°$, deci locul lui P este un semicerc de diametru AN.

3.1763B Ce fel de triunghi este ABC (a, b, c lungimile laturilor) dacă volumele V_a, V_b, V_c ale corpurilor obţinute prin rotaţia triunghiului în jurul laturilor BC, CA, AB verifică relaţia $\frac{1}{V_a^2} - \frac{1}{V_b^2} - \frac{1}{V_c^2} = 0$. R. Triunghiul dreptunghic verifică relaţia (avem $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, b, c catetele, h înălţimea corespunzătoare ipotenuzei). Reciproc: notând cu S aria triunghiului şi cu h_a, h_b, h_c înălţimile corespunzătoare laturilor BC, CA, AB rezultă $3V_a = (2\pi S)h_a$, $3V_b = (2\pi S)h_b$, $3V_c = (2\pi S)h_c$ de unde $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ deci ABC este dreptunghic.

3.1764B Dacă într-o piramidă regulată cu baza un hexagon regulat de latură $a = 1$, înălţimea este $h = 2$, atunci unghiul α între două muchii laterale alăturate este dat de $2\sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2} = 1$; o muchie laterală este $b = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{5}$ iar $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}$ deci $2\sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2} = 1$.

3.1765B În cubul $ABCDA'B'C'D'$ unghiul dintre AC şi AB' este $\frac{\pi}{3}$ deoarece ACB' este un triunghi echilateral, laturile sale sunt egale fiind diagonale de feţe (de fapt de pătrate).

3.1766B Unghiul dintre două diagonale ale unui cub (acelaşi pentru orice pereche de diagonale) este $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$; dacă notăm lungimea laturii cu a şi aplicăm teorema cosinusului putem scrie $a^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (1 - \cos\alpha)$.

3.1767B Secţiunea unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ cu $AB = a$, $VA = b$ cu un plan ce trece printr-o muchie a bazei şi prin mijlocul înălţimii este un trapez isoscel. Fie $AMND$ secţiunea, $MN \| AD$ deoarece AD este paralelă cu planul VBC, $MN \| BC \Rightarrow MB = NC$, $\Delta AMB = DNC \Rightarrow AM = DN$ deci $AMND$ este trapez isoscel.

3.1868C În tetraedrul $OABC$, tridreptunghic în O cu $OA = OB = OC = a$, $OP = h$, $OP \perp (ABC)$ şi φ măsura unghiului diedru format de (ABC) cu (OAB). Notând M mijlocul lui AB, OP este înălţime în OCM deci $AB = a\sqrt{2}$, $CM = (a\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CM \cdot OP = OM \cdot OC \Rightarrow OP = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\text{tg}\varphi = \frac{OC}{OM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$, $\varphi = \text{arctg}\sqrt{2}$.

3.1769C Într-o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ unde latura bazei este 2 şi înălţimea 8 se duce un plan π prin muchia AC a bazei şi perpendicular pe muchia laterală $VB = d$ opusă $M = \pi \cap d$ se cere aria acestei secţiuni. Fie $d = VB$ şi O piciorul înălţimii din V. $OB = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $VB = \sqrt{8^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{14}{\sqrt{3}}$. Apotema unei feţe laterale este $a = \sqrt{\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{193}{3}}$. Triunghiul isoscel AMC, are latura $AM = CM = \frac{\sqrt{193}}{7}$ şi înălţimea din M, $MM' = \frac{12}{7}$, deci aria secţiunii este $\frac{\frac{12}{7} \cdot 2}{2} = \frac{12}{7}$.

3.1770C Dacă planul triunghiului dreptunghic ABC cu înălţimea $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ şi $\hat{A} = 90°$ se îndoaie după dreapta AD până semiplanele (ADB) şi (ADC) devin perpendiculare, volumul piramidei $ABCD$ este $V = \frac{a^3}{6}$ deoarece $AD^2 = DB \cdot DC$, $a^2 = bc$, $V = \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{6}$.

3.1771C Tetraedrul T' care se obţine ducând prin fiecare vârf al tetraedrului T plane paralele cu feţele opuse este asemenea cu T şi raportul a două muchii omoloage este $\frac{1}{3}$ deci raportul volumelor $k = \frac{\text{vol}(T)}{\text{vol}(T')} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

3.1772C În piramida $VABC$ (ABC triunghi echilateral de latură a) unghiurile diedre dintre planul bazei şi cele trei plane ale feţelor laterale sunt de $30°, 45°, 60°$, înălţimea din V este $h = \frac{3(4-\sqrt{3})a}{26}$ deci $V = \frac{a^3\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{104}$: notăm cu V' proiecţia lui V pe (ABC) şi cu h_1, h_2, h_3 distanţele de la V' la laturile triunghiului ABC şi avem $\frac{h_1}{h} = \text{ctg}30°$, $\frac{h_2}{h} = \text{ctg}45°$, $\frac{h_3}{h} = \text{ctg}60°$, $h_1 + h_2 + h_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{h_1+h_2+h_3}{h} = \sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $h = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{4-\sqrt{3}}{13} = \frac{(3(4-\sqrt{3})a}{26}$, $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3(4-\sqrt{3})a}{26} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{104}$.

3.1773C Volumul tetraedrului $MA'B'C'$ înscris în cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a unde M este mijlocul lui $[AB]$ este $v = \frac{a^3}{6}$ deoarece înălţimea tetraedrului este egală cu latura a.

3.1774C Tetraedrul $SABC$ cu proprietatea $SA = SB = SC = AB = AC = a$ şi α măsura unghiului diedru format de feţele SAB, SAC este $V = \frac{a^3\sin\alpha}{8}$. Dacă M este mijlocul lui SA, tetraedrele $SMBC$ şi $MABC$ sunt egale cu baza comună MBC şi înălţimile egale $MS = MA = \frac{a}{2}$, $MB = MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci $V = \frac{MB \cdot MC \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \frac{a}{3} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{6}\sin\alpha = \frac{a^3\sin\alpha}{8}$.

3.1775C Un tetraedru cu perechile de muchii opuse ortogonale se numeşte ortogonal. Pentru a fi ortogonal, un tetraedru este suficient ca numai două perechi de muchii opuse să fie perpendiculare sau echivalent cu aceasta un tetraedru este ortogonal $\Leftrightarrow$ un vârf se proiectează în ortocentrul feţei opuse.

3.1776C Distanţa dintre centrele a două feţe ale unui tetraedru regulat de

muchia a este $\frac{a}{3}$: fie M mijlocul laturii AC în tetraedrul $ABCD$ şi G_D, G_B centrele de greutate ale feţelor DAC şi BAC; deoarece $\frac{MG_D}{MB} = \frac{MG_B}{MD} = \frac{G_BG_D}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_BG_D = \frac{a}{3}$.

3.1777C Volumul V al octoedrului regulat de muchie a este evident egal cu $2\frac{a^2 \cdot h}{3}$ unde $h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (octoedrul este format din două piramide patrulatere regulate cu aceeaşi bază, un pătrat şi muchiile laterale egale).

3.1778C Volumul unui paralelipiped dreptunghic ale cărui dimensiuni a, b, c sunt proporţionale respectiv cu numerele α, β, γ este $V = k^3\alpha\beta\gamma$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = k$, $V = abc = k^3\alpha\beta\gamma$, $k = \sqrt[3]{\frac{V}{\alpha\beta\gamma}}$, deci $a = \alpha\sqrt[3]{\frac{V}{\alpha\beta\gamma}}$.

3.1779C Volumul tetraedrului $B'MNP$, unde M, N, P sunt mijloacele lui AB, $B'D$, BC în cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a este $V = \frac{a^3}{16}$. Fie M', P' punctele unde planul (MNP) taie $D'C'$ respectiv $D'A'$. Deoarece $B'M' = B'M = B'P' = B'P = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ rezultă $B'N \perp (MNP)$ deci $B'N$ este înălţimea tetraedrului $B'MNP$ şi $B'N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul MNP este isoscel de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi înălţimea $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3}{16}$.

3.1780C O piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ de latură l cu $VA \perp (ABCD)$ şi $VA = l$ are raza sferei circumscrise $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Centrul sferei O este mijlocul lui VC, $VC = \sqrt{VA^2 + AC^2} = \sqrt{l^2 + 2l^2} = l\sqrt{3} \Rightarrow R = OV = OC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

3.1781C Pe muchiile din B şi C ale suprafeţei prismatice care are drept secţiune dreaptă triunghiul echilateral ABC de latură 1 se iau de aceeaşi parte a planului ABC punctele B' respectiv C' astfel încât $BB' = \sqrt{2}$ şi triunghiul $AB'C'$ este dreptunghic. Se cere volumul corpului $ABCC'B'$ şi unghiul α dintre ABC şi $AB'C'$. Notăm $x = C'C$, $n = AC'$, $m = C'B'$, $M = (BC) \cap (B'C')$ şi CC'' înălţimea triunghiului ACM. Avem $n^2 = 1 + x^2$, $m^2 = 1 + (\sqrt{2} - x)^2$, $AB' = \sqrt{AB^2 + B'B^2} = \sqrt{3}$, $m^2 + n^2 = (\sqrt{3})^2$ deci $1 + x^2 + 1 + (\sqrt{2} - x)^2 = 3 \Rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $m = n = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ACM este isoscel $AC = CM = 1$, $CC'' = \frac{1}{2}$, $\alpha = \angle C'CC''C$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3}$, $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. $ABCC'B'$ este o piramidă patrulateră cu vârful în A şi baza $BCC'B'$ având înălţimea h= înălţimea triunghiului $CAB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

3.1782C În tetraedrul $ABCD$ tridreptunghic în A cu $AB = AC = AD = a$ fie M, N mijloacele lui $[DB]$ şi $[DC]$. Se cere volumul V al piramidei $DAMN$ cu baza DMN şi vârful A: aria bazei DMN este $\frac{1}{4}$ din aria trunghiului DBC

iar înălţimea h din A este aceeaşi cu a piramidei $ABCD$ luată din A, deci $V = \frac{1}{4}$ din volumul lui $ABCD$; $V = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{24}$.

3.1783C Volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = x$ şi perimetrul triunghiului $ACC_1 = 60$ este $V = 1152$: $AC = 10$, $AC + CC_1 + C_1A = 60$, $10 + x + \sqrt{x^2 + 10^2} = 60 \Rightarrow x = 24$, $V = 8 \cdot 6 \cdot 24 = 1152$.

3.1784C Minimul lungimii segmentului MN unde $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $ABCA_1B_1C_1$ fiind o prismă triunghiulară regulată cu muchiile egale cu a este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$: MN este ipotenuza în triunghiul dreptunghic în A_1, MA_1N şi este minim când catetele MA_1 şi NA_1 sunt minime deci $MA_1 = 0$, $NA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (NA_1 este înălţime), deci $MN = A_1N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3.1785C Paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ cu baza dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile $[AB], [AD], [AA']$ de lungimi a, b, c are $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = x$ (în radiani) şi se cere volumul. M, piciorul înălţimii din A' este pe bisectoarea unghiului DAB şi notăm latura pătratului $APMN$ ($A'P \perp AB, A'N \perp AD$, $P \in [AB]$, $N \in [AD]$) cu m. Avem $m = c\cos x$, $A'P = A'N = c\sin x$, $h = \sqrt{A'P^2 - m^2} = c\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sqrt{-\cos 2x}$, $V = abh = abc\sqrt{-\cos 2x}$.

3.1786C Volumul corpului format de punctele dintr-un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie 1 care au proprietatea că distanţele lor la feţele $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi este $V = \frac{1}{2}$. Considerăm un reper Ox, Oy, Oz cu originea $O = A$ şi astfel încât $[AB] \subset Ox$, $[AD] \subset Oy$, $[AD'] \subset Oz$ şi un punct $M(x, y, z)$ din cub. Condiţiile impuse se scriu $z < x + y$, $y < x + z$, $x < z + y$. Se observă că planul $z = x + y$ este de fapt $AA'C'$ iar mulţimea punctelor care verifică inegalitatea $z < x + y$ este semispaţiul de sub acest plan. Deci trebuie înlăturat din cub tetraedrul $AA'C'D'$ al cărui volum este $\frac{1}{6}$. Analog pentru semispaţiile definite de inegalităţile $y < x + z$, $x < y - z$, va trebui să înlăturăm tetraedrele $ACDC'$ respectiv $ABCA'$ de volume egale cu $\frac{1}{6}$. Rămâne tetraedrul $ACA'C'$ de volum $\frac{1}{2}$.

3.1787C Aria totală a unei piramide hexagonale regulate cu apotema 1 şi care face un unghi de 60° cu planul bazei este $S = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Apotema bazei = r= raza cercului înscris şi R= raza cercului circumscris hexagonului de bază = latura hexagonului sunt $r = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ iar înălţimea $h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rezultă $S = S_{lat} + S_{bazei} = 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.1788C În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a se cere distanţa h de la A la diagonale BD'. Distanţa h este înălţimea AM în triunghiul BAD' dreptunghic în A, deci $BD' \cdot AM = AB \cdot AD'$, $a\sqrt{3} \cdot h = a \cdot a\sqrt{2}$, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

3.1789C Înălţimea h^* a piramidei regulate din care s-a format un trunchi de piramidă de laturi ale bazei a şi b $(a > b)$ şi înălţimea h este $h^* = h\frac{a}{a-b}$. Notăm h' înălţimea piramidei mici care se înlătură la formarea trunchiului. Avem $\frac{h'}{h'+h} = \frac{b}{a}$, $h' = \frac{b}{a-b} \cdot h$, $h^* = h + h' = h \cdot \frac{a}{a-b}$.

3.11 Corpuri rotunde. Arii şi volume

3.1790A Înălţimea calotei de arie 8 într-o sferă de rază $r = 2$ este $h = \frac{2}{\pi}$: $S = 2\pi\, r\, h$, $8 = 2\pi \cdot 2 \cdot h$, $h = \frac{2}{\pi}$.

3.1791A Aria S a unei sfere de volum $V = \frac{4\pi}{3}$ este $S = 4\pi : V = \frac{4\pi R^3}{3}$, $S = 4\pi R^2$ deci $R = 1$.

3.1792A Raza R a conului a cărui arie totală este $S = 4\pi$ şi generatoarea $G = 3$ este $R = 1$: $S = \pi R^3 + \pi RG = 4\pi$, $R^2 + 3R - 4 = 0$, $R = 1$.

3.1793A Un con de generatoare 5 şi rază 4 are volumul $V = 16\pi$: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 16\pi$.

3.1794A Un trunchi de con cu razele bazelor $r = 5$ şi $R = 7$ şi de arie laterală 24π are generatoarea $G = 2$: $S_l = \pi G(R + r)$, $\pi G(7 + 5) = 24\pi$, $G = 2$.

3.1795A Volumul unui trunchi de con de raza $r = 1$, $R = 2$ şi înălţime $h = 3$ este $V = 7\pi : V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 3}{3}(2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1) = 7\pi$.

3.1796A Raza unui cilindru de volum 6 şi înălţime $\frac{1}{3\pi}$ este $R = 3\sqrt{2}$: $V = \pi R^2 h = 6$, $\pi R^2 \cdot \frac{1}{3\pi} = 6$, $R^2 = 18$, $R = 3\sqrt{2}$.

3.1797A Înălţimea unui cilindru de rază $R = 2$ şi arie totală $S = 24\pi$ este $h = 4$: $S_t = 2\pi R(h + R)$, $2\pi \cdot 2(h + 2) = 24\pi$, $h = 4$.

3.1798A O emisferă de volum egal cu cel al unui con de rază $R = 3$ şi înălţime $h = 6$, are raza $r = 3 : V_{con} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 6}{3} = 18\pi = \frac{4\pi r^2}{2}$.

3.1799A Prin rotirea unui pătrat de latură $l = 1$ în jurul unei laturi se obţine un corp de arie totală $S_t = 4\pi : S_t = 2\pi R(R + h) = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 4\pi$.

3.1800A Volumul corpului obţinut prin rotirea unui romb format din două triunghiuri echilaterale de latură a în jurul diagonalei mari este $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$: se obţin două conuri cu aceeaşi bază de arie $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ şi înălţimi egale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci $V = 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$.

3.1801A Rotind un cerc al cărui diametru are lungimea 1 în jurul unui diametru se obţine o sferă de volum $V = \frac{4\pi}{3}$.

3.1802A Dacă raportul razelor a două sfere este $\frac{1}{2}$ iar volumul sferei mari este π, atunci volumul sferei mici este $v = \frac{\pi}{4}$, raportul volumelor este $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ deci $v = \frac{\pi}{8}$.

3.1803A Un con cu secţiunea axială triunghi echilateral de latură l înscris într-un cilindru de rază $r = 1$ are volumul $V = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$: $l = 2$, $h = \sqrt{3}$, $r = 1$, $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

3.1804A Un cilindru de secţiune axială pătrat de latură 2 are aria totală $S_t = 6\pi$: $S_t = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh$, $r = 1$, $h = 2$, $S_t = 2\pi(3) = 6\pi$.

3.1805A Aria unui cerc mare al unei sfere de rază R şi arie 9 este $S = \frac{9}{4}$; $S_{sferă} = 4\pi R^2 = \frac{9}{4}$.

3.1806A Raza R a unei sfere a cărei arie şi volum se exprimă prin acelaşi număr este $R = 3$; $4\pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{3} \Rightarrow \frac{R}{3} = 1$, $R = 3$.

3.1807A Raza cilindrului circumscris unui cub de latură a este $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, deoarece diametrul este diagonala unei feţe, $a\sqrt{2}$.

3.1808A Distanţa l de la vârful unui con circular drept de înălţime h la care trebuie dus un plan paralel cu baza pentru ca acest con să fie împărţit în două corpuri de volume egale este $l = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} : \frac{v}{V} = \frac{1}{2} = \left(\frac{l}{h}\right)^3 \Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

3.1809A Înălţimea h şi raza R a bazei unui con circular drept sunt $h = 5$ cm şi $R = 3$ cm. Distanţa x de la planul bazei la punctul P, P aflându-se la aceeaşi distanţă de vârful conului şi de punctele de pe cercul bazei este $x = 1,6$ cm: $(h - x)^2 = x^2 + R^2$, $(5 - x)^2 = x^2 + 3^2$, $x = \frac{8}{5}$cm $= 1,6$cm.

3.1810A Un dreptunghi $ABCD$ de laturi $AB = 3$, $BC = 2$ se roteşte în jurul lui AB apoi în jurul lui BC obţinându-se doi cilindri de volume V_1 şi V_2. Se cere $k = \frac{V_1}{V_2}$. $V_1 = \pi \cdot BC^2 \cdot AB$, $V_2 = \pi \cdot AB^2 \cdot BC$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$.

3.1811A O sferă de rază ρ este înscrisă într-un trunchi de con cu razele bazelor r, R iar înălţimea şi generatoarea sunt h, g. Avem relaţiile $Rr = \rho^2$, $h = 2\rho$, $g = R + r$. Relaţiile $2\rho = h$, $g = r + R$ sunt evidente, iar din teorema lui Pitagora avem $(R + r)^2 - (R - r)^2 = (2\rho)^2 \Rightarrow Rr = \rho^2$.

3.1812A Volumul V al conului drept de generatoare $G = 3$ înscris în sfera de rază $R = 2$ este $V = \frac{189}{64}\pi$. Dacă VAB este o secţiune axială a conului iar V' punctul de pe sferă diametral opus lui V, atunci $V'B = \sqrt{V'V^2 - VB^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$; notând cu ρ raza cercului de bază a conului avem $\frac{\rho}{G} = \frac{V'B}{V'V} \Rightarrow \rho = \frac{3\sqrt{7}}{4}$ iar înălţimea h a conului este dată de $h = \sqrt{G^2 - \rho^2} = \sqrt{9 - \frac{9 \cdot 7}{16}} = \frac{9}{4}$. Deci volumul este $V = \frac{\pi \rho^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{189}{64}\pi$.

3.1813A Dacă volumul unei sfere înscrise într-un trunchi de con circular drept este jumătate din volumul trunchiului, tangenta unghiului între o gen-

eratoare şi baza mare a trunchiului este $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Conform cu 3.1811A şi cu aceleaşi notaţii avem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{R-r}$, $2\frac{4\pi\rho^3}{3} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, $h = 2\rho$, $\rho^2 = R \cdot r \Rightarrow 4\rho^2 = R^2 + r^2 + Rr$, $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr$, $\rho^2 = (R-r)^2$ deci $R - r = \rho$ şi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\rho}{R-r} = \frac{2\rho}{\rho} = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg}2$.

3.1814A Volumul prismei triunghiulare regulate de înălţime h şi latura bazei a, înscrisă într-o sferă de rază R este $V = \frac{3\sqrt{3}}{16}(4R^2 - h^2)$. Dacă r este raza cercului circumscris triunghiului bazei prismei, atunci avem $a = \sqrt{3}r$, $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$ aria bazei $S = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $V = S \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}(4R^2 - h^2)h$ deci volumul este $V = \frac{3\sqrt{3}h}{16}(4R^2 - h^2)h$.

3.1815A Volumul cilindrului circular drept a cărei înălţime este $h = 6$ şi arie totală $A_t = 80\pi$ este $V = 96\pi$: dacă r este raza bazei cilindrului, $A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 80\pi \Rightarrow r^2 + 6r - 40 = 0$, $r = 4$, $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$.

3.1816A Dacă S_1, S_2, S_3 sunt ariile laterale ale corpurilor obţinute prin rotaţia în jurul ipotenuzei şi catetelor triunghiului dreptunghic de ipotenuză a şi catete b, c atunci $\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2+S_3}{S_1}$; fie h înălţimea din A ($\hat{A} = \frac{\pi}{2}$); $S_1 = \pi h(b+c)$, $S_2 = \pi bc$, $S_3 = \pi ac$, $\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{\pi ab}{\pi ac} + \frac{\pi ac}{\pi ab} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b^2+c^2}{bc} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a}{h}$, $\frac{S_2+S_3}{S_1} = \frac{\pi a(b+c)}{\pi h(b+c)} = \frac{a}{h}$.

3.1817A Volumul trunchiului de con cu razele $R = 5$, $r = 2$ şi generatoarea $G = 5$ este $V = 52\pi$: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ unde h este înălţimea trunchiului, $h = \sqrt{G^2 - (R-r)^2} = \sqrt{5^2 - (5-2)^2} = \sqrt{16} = 4$, $V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(5^2 + 2^2 + 5 \cdot 2) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 39}{3} = 52\pi$.

3.1818A Volumul cilindrului circular drept circumscris unui cub cu muchia a este $V = \frac{\pi a^3}{2}$: raza cercului bazei cilindrului este $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, înălţimea cilindrului $h = a$, volumul $V = \pi r^2$, $h = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}$.

3.1819A Volumul conului circular drept cu înălţimea $h = 3$ şi suma între rază şi generatoare, $R + G = 5$ este $V = \frac{64\pi}{25}$: $R^2 + 3^2 = G^2$, $R + G = 5$, $R^2 + 9 = (5 - R)^2 \Rightarrow R = \frac{8}{5}$, $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{64\pi}{25}$.

3.1820A Dacă la un con circular drept unghiul unei generatoare cu planul bazei este $\frac{\pi}{4}$ iar înălţimea h, volumul este $V = \frac{\pi h^3}{3}$; raza bazei este $R = h$, deci $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi h^3}{3}$.

3.1821A Într-un cub de muchie a raportul α al volumelor şi raportul β al ariilor sferelor circumscrisă şi înscrisă este $\alpha = 3\sqrt{3}$, $\beta = 3$. Sfera circumscrisă are raza $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, iar cea înscrisă raza $r = \frac{a}{2}$ deci $\frac{V}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a}\right)^3 = 3\sqrt{3} = \alpha$, $\frac{S}{s} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 3 = \beta$.

3.1822B Un con şi un cilindru (ambele circulare drepte) au aceeaşi înălţime

$h = 3$, aceeaşi arie laterală şi acelaşi volum. Atunci raza bazei conului este $R = \sqrt{3}$. Dacă r este raza bazei cilindrului avem $\frac{\pi R^2 h}{3} = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow R = \sqrt{3}r$. $\pi RG = 2\pi r \cdot h$, $R\sqrt{R^2 + h^2} = 2rh$, $R^2(R^2 + h^2) = \frac{4}{3}R^2 \cdot h^2 \Rightarrow R = \frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

3.1823A Trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = CD = DA = 2$ se roteşte în jurul dreptei BC. Volumul corpului obţinut este $V = 14\pi$. Unghiul ascuţit al trapezului este de 60°, se obţin două conuri egale cu aceeaşi bază având raza $R = AC = 2\sqrt{3}$ ($\widehat{ACB} = 90^\circ$) şi înălţimile $h = 2 = BC$ din care se scad volumele altor două conuri egale cu bază comună, cu raza şi înălţime jumătate din primele, deci $V = 2\frac{\pi(2\sqrt{3})^2 \cdot 2}{3} - 2\frac{\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 1}{3} = \frac{2\pi}{3}(24 - 3) = 14\pi$.

3.1824B Dacă v, x, y sunt volumele generate prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei şi respectiv în jurul celor două catete atunci $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ (vezi 3.1763B).

3.1825B Sferele (S_1) şi (S_4) interioare sferei S, de diametre AM şi BM (M este pe diametrul AB al sferei S) sunt tangente între ele şi tangente interior sferei S. Se cere poziţia lui M astfel ca mărimea $V_S - V_{S_1} - V_{S_2}$ să fie maximă, deci $V_{S_1} + V_{S_2}$ să fie minim. Fie R, r, ρ razele celor trei sfere, $r + \rho = R$ şi $V_{S_1} + V_{S_2} = \frac{4\pi}{3}(r^3 + \rho^3) = \frac{4\pi}{3}[r^3 + (R-r)^3] = \frac{4\pi}{3}(\mathbf{R}^3 - 3R^2r + 3Rr^2]$; $f(r) = 3r^2 - 3Rr + R^2$ este minimă pentru $r = \frac{R}{2}$ deoarece $f'(r) = 6r - 3R = 0 \Rightarrow 2r = R$, deci M este centrul sferei S.

3.1826B Volumul sferei înscrise într-un con echilateral cu generatoarea $G = 2R$ (secţiunea axială este un triunghi echilateral) cu aria laterală $S_t = 8\pi$ este $V = \frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$: $S_l = \pi RG = 2\pi R^2 = 8\pi$, $R = 2$, $r =$ raza sferei înscrise este $r = \frac{1}{3}\left(2R\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{32 \cdot \pi}{9\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$.

3.1827B Un plan paralel cu planul bazei determină într-un con circular drept (având raza bazei R şi înălţimea $h = 2R$) un trunchi de con de înălţime d. Volumul trunchiului în funcţie de$R$ şi d este $V_{tr} = \frac{\pi d}{12}(12R^2 - 6Rd + d^2)$. Din asemănare rezultă $\frac{2R-d}{r} = \frac{2R}{R}$ (r=raza cercului de secţiune) $\Rightarrow r = R - \frac{d}{2}$, $V_{tr} = \frac{\pi d}{3}\left(R^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(R\left(R - \frac{d}{2}\right)\right)\right) = \frac{\pi d}{12}(12R^2 - 6Rd + d^2)$.

3.1828B Raza ρ a sferei care trece prin A, B, C şi O_1, centrul feţei $A_1B_1C_1D_1$ într-un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de latură a este $\rho = \frac{3a}{4}$. Centrul sferei ω se găseşte pe înălţimea O_1O a triunghiului AO_1C şi avem $\omega O_1 = \omega C = \rho$, $\omega O = a - \rho$, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $(a - \rho)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \frac{3a}{4}$.

3.1829B Dacă un cilindru şi un con au aceeaşi înălţime h şi acelaşi volum V, raportul $k = \frac{R}{r}$ între raza conului R şi raza cilindrului r este $k = \sqrt{3}$: $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \pi r^3 h \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 3$.

3.1830B Dacă V_1, V_2, V_3 sunt volumele corpurilor obţinute prin rotirea unui

triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei respectiv catetelor atunci $\frac{V_2}{V_3}+\frac{V_3}{V_2}=\frac{V_2+V_3}{V_1}$ (vezi 3.1824B şi 3.1816A).

3.1831B Sfera înscrisă în cubul de latură 2 are volumul $V=\frac{4\pi}{3}$, $(R=1)$.

3.1832B Raza mică ρ a unui trunchi de con circumscris unei sfere de rază $R=6$ trunchiul având raza mare $r=9$, este $\rho=4$; avem $R^2=\rho r$ (vezi 3.1811A) $\Rightarrow 6^2=r\cdot 9$, $r=4$.

3.1833C Un poliedru circumsciptibil cu aria totală S şi volumul V are raza sferei înscrise $r=\frac{3V}{S}$: suma volumelor piramidelor cu vârfurile în centrul sferei înscrise având drept baze, feţele poliedrului şi aceeaşi înălţime r este egală cu volumul poliedrului: $\frac{S_1r}{3}+\frac{S_2r}{3}+\ldots+\frac{S_nr}{3}=V$, $r=\frac{3V}{\Sigma S_i}=\frac{3V}{S}$.

3.1834C Raportul dintre volumul corpului obţinut prin rotirea unui triunghi echilateral de latură a în jurul unei laturi şi cel determinat de triunghiul său ortic prin aceeaşi rotire este $k=4$: $V_{total}=2\frac{\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{2}}{3}=\frac{\pi a^3}{4}$, $V_{ortic}=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2\frac{a}{2}-2\frac{\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2\cdot\frac{a}{4}}{3}=\frac{\pi a^3}{16}$, $k=\frac{V_{total}}{V_{ortic}}=4$.

3.1835C Aria totală şi volumul conului circular drept, în funcţie de raza r a sferei înscrisă în con (unghiul de la vârf al conului este de $60°$) este $S_t=9\pi r^2$, $V=3\pi r^3$. Dacă a este generatoarea conului, raza bazei este $R=\frac{a}{2}$ şi avem $r=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $a=2\sqrt{3}r$, $R=\sqrt{3}r$, $S_t=\pi R^2+\pi RG=\pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{3\pi a^2}{4}=9\pi r^2$, $V=\frac{\pi R^2\cdot h}{3}=\frac{\pi\frac{a^2}{4}\cdot 3r}{3}=\frac{\pi a^2 r}{4}=\frac{\pi\cdot 4\cdot 3r^3}{4}=3\pi r^3$.

3.1836C Într-o sferă de rază R se înscrie un corp format dintr-un cilindru având raza bazei r completat cu două conuri identice aşezate pe cele două baze ale cilindrului. Volumul unuia din conuri este $V=\frac{\pi r^2}{3}(R-\sqrt{R^2-x^2})$: dacă h este înălţimea unui con avem $(R-h)^2+r^2=R^2$, $h^2-2Rh+r^2=0$, $h=R-\sqrt{R^2-r^2}$, $V=\frac{\pi r^2}{3}(R-\sqrt{R^2-r^2})$.

3.1837C Un con circular drept echilateral circumscris unei sfere are aria totală A şi volumul V, iar sfera are aria S şi volumul V'. Atunci $\frac{S}{A}=\frac{4}{9}$, $\frac{V}{V}=\frac{4}{9}$. Notăm lungimea diametrului şi generatoarei conului cu a şi a razei cu r. Evident $r=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$ şi raza conului este $R=\frac{a}{2}$, 3.1838C. $A=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{a}{2}\right)a=\frac{3\pi a^2}{4}$, $S=4\pi r^2=4\pi\frac{a^2}{12}=\frac{\pi a^2}{3}$, $V=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\pi a^3}{8\sqrt{3}}$, $V'=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3}{8\cdot 3\sqrt{3}}$, deci $\frac{S}{A}=\frac{4}{9}$, $\frac{V'}{V}=\frac{4}{9}$. Cercul de rază $R=6$ are aria $\pi R^2=36\pi$ iar aria sectorului care este şi aria laterală a conului este $\frac{1}{3}\cdot 36\pi=12\pi$.

3.1839C Razele bazelor unui trunchi de con circular drept circumscris unei sfere sunt R şi $r=\frac{R}{2}(3-\sqrt{5})$; se cere înălţimea trunchiului,

$h=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=\sqrt{4Rr}=R\sqrt{2(3-\sqrt{5})}$ (vezi şi 3.1832B, 3.1813A).

3.1840C Raportul dintre volumele sferei înscrise într-o piramidă parulateră regulată şi volumul piramidei, dacă înălţimea piramidei este de 4 ori mai mare decât diametrul sferei este $k=\frac{V_{sf}}{V_{pir}}=\frac{3\pi}{32}$. Fie r,a,h,l, razele sferei înscrise, a latura bazei respectiv înălţimea şi apotema piramidei. Atunci $h=8r$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2=l^2$, $\frac{\frac{a}{2}}{l}=\frac{r}{h-r}=\frac{r}{7r}=\frac{1}{7}$, $l=\frac{7a}{2}$, $\frac{a}{2}=\frac{h}{4\sqrt{3}}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$, $a=\frac{4r}{\sqrt{3}}$, $V_{sf}=\frac{4\pi r^3}{3}$, $V_{pir}=\frac{a^2h}{3}=\frac{128r^3}{9}$, $\frac{V_{sf}}{V_{pir}}=\frac{3\pi}{32}$.

3.1841C Se consideră patru sfere de rază $r=\sqrt{3}$ tangente două câte două şi un con circular drept circumscris celor patru sfere. Se cere înălţimea conului. Considerând secţiunea determinată de centrele a două sfere şi una din cele trei generatoare ale conului tangentă la două dintre sfere, notăm cu α unghiul dintre generatoare şi baza conului şi cu ρ raza conului. Unghiul α este de fapt unghiul pe care îl face într-un tetraedru regulat o muchie laterală cu planul bazei deci $\cos\alpha=\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Se observă pe figură că $h=r+2r\sin\alpha+\frac{r}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{3}\right)$, $h=3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

3.1842C Aria sferei de rază ρ înscrisă într-un trunchi de con cu razele bazelor r_1,r_2 este $S=4\pi r_1r_2$ (vezi 3.1811A): $\rho^2=r_1r_2$, $S=4\pi\rho^2=4\pi r_1r_2$ $((2\rho)^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2)$).

3.1843C Raportul dintre volumul sferei circumscrise şi volumul sferei înscrise într-un circular drept cu raza bazei $\rho=3$ şi înălţimea $h=4$ este $k=\left(\frac{25}{12}\right)^2$. Generatoarea conului este $G=\sqrt{3^2+4^2}=5$ şi din formulele $4RS=abc$, $pr=S$ rezultă $R=\frac{25}{8}$, $r=\frac{3}{2}$, $\frac{V}{v}=k=\left(\frac{25}{12}\right)^2$.

3.1844C Un con circular drept are trei generatoare perpendiculare două câte două de lungime 1; volumul său este $V=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$. Fie A,B,C extremităţile celor trei generatoare, O vârful conului $OA=OB=OC=1$, $AB=AC=BC=\sqrt{2}$, raza conului este $r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, înălţimea $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $V=\frac{\pi r^2h}{3}=\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.